C－1

平成21年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注　意　事　項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので，この冊子を裏返して必ず読み，志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし，この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄には受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがある。
5. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
7. この冊子は12頁である。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には，解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す問題に解答すること。

科目	学部・学科等		解答する問題番号
数学 I 数学 A	教育学部	算数科選修	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$
	教育学部	理科教育分野 技術科教育分野	$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$
数学 I 数学 II 数学 A 数学 B	文学部 法経学部	行動科学科	$\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$
	園芸学部 教育学部	 情報教育分野	$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$
	教育学部	数学科教育分野	$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$
数学 I 数学 II 数学 III 数学 A 数学 B 数学 C	理学部 工学部	生物学科，地球科学科 建築学科 都市環境システム学科 デザイン学科	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{9}$
	理学部 薬学部 工学部 先進科学プログラム	物理学科，化学科 機械工学科 メディカルシステム工学科 電気電子工学科 ナノサイエンス学科 共生応用化学科 画像科学科 情報画像学科	$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$
	医学部		$\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$
	理学部	数学・情報数理学科	$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{12}$

$\boxed{\textbf{1}}$ 放物線 $y=x^2$ …… ① と 直線 $y=x$ …… ② について次の問いに答えよ。

(1) 放物線①上の点Pに対し，直線②上の点であってPに最も近い点をQとする。Pの x 座標を t とするとき，2点間の距離PQを t を用いて表せ。

(2) (1)で求めた t の関数を $f(t)$ とするとき，$f(t)$ のグラフをかけ。

(3) (2)の関数 $f(t)$ について $f(t)=\sqrt{2}$ となる t の値を求めよ。

2 $\triangle$ABC は AB = AC の二等辺三角形とする。$\angle$A，$\angle$B の大きさをそれぞれ A，B とおく。$A = 30°$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) 頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線を AH とする。ただし，H は辺 BC 上の点である。このとき $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ。

(2) $\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)\cos B$ の値を求めよ。

3 自然数 $a,\ b,\ c,\ d$ は

$$c = 4a + 7b, \quad d = 3a + 4b$$

を満たしているものとする。

(1) $c + 3d$ が 5 の倍数ならば $2a + b$ も 5 の倍数であることを示せ。

(2) a と b が互いに素で，c と d がどちらも素数 p の倍数ならば，$p = 5$ であることを示せ。ただし，2 つの自然数が互いに素とは，1 以外の正の公約数をもたないことをいう。

4 1から9までの番号をつけた9枚のカードがある。このなかから無作為に4枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた4つの番号の積をXとおく。

(1) Xが5の倍数になる確率を求めよ。

(2) Xが10の倍数になる確率を求めよ。

(3) Xが6の倍数になる確率を求めよ。

$\boxed{\textbf{5}}$ 座標平面上に点 A$(3, 0)$，B$(0, 2)$ を取る。線分 AB 上に点 P を取り，P から x 軸に下ろした垂線を PH，A と H の中点を M とする。ただし点 H は x 軸上の点とし，また P は A と異なるものとする。O を原点とし △OPM を O を中心に座標平面内で 1 回転するとき，通過する点全体が作る円の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

$\boxed{6}$ n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2) 不等式

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$$

が成り立つことを示せ。

(3) 不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

が成り立つことを示せ。

7 a と k を正の実数とする。$y=\dfrac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y=-\dfrac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が，ともに原点 $\mathrm{O}(0,0)$ で直線 $y=kx$ に接するものとする。原点 O を通り，直線 $y=kx$ に垂直な直線を ℓ とする。放物線 C_1 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_1，放物線 C_2 と直線 ℓ によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき，$S=S_1+S_2$ とする。次の問いに答えよ。

(1) S を a と k を用いて表せ。

(2) $k=\sqrt{2}-1$ とする。S を最小にする a の値と，そのときの S の値を求めよ。

8 1から9までの番号をつけた9枚のカードがある。このなかから無作為に4枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた4つの番号の積をXとおく。

(1) Xが5の倍数になる確率を求めよ。

(2) Xが12の倍数になる確率を求めよ。

(3) Xが平方数になる確率を求めよ。ただし，Xが平方数であるとは，ある自然数nを用いて$X = n^2$と表されることである。

9 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とし，また実数 a，b について $g(x) = e^{-ax+b}$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ において常に $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つために a，b が満たすべき条件を求めよ。

(2) $y = g(x)$ のグラフが点 $(1, 1)$ で $y = f(x)$ のグラフと接するように a，b を定めたときの $g(x)$ を $g_1(x)$ とする。同様に $y = g(x)$ のグラフが点 $(2, \dfrac{1}{2})$ で $y = f(x)$ のグラフと接するように a，b を定めたときの $g(x)$ を $g_2(x)$ とする。このとき，$y = g_1(x)$ と $y = g_2(x)$ の交点を求めよ。

(3) (2) で定めた $y = g_1(x)$，$y = g_2(x)$ と $y = f(x)$ の 3 つの曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{10}}$ 次の問いに答えよ。

(1) 置換 $x = \tan^3\theta$ により，定積分 $\displaystyle\int_1^{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ を求めよ。

(2) $t > 1$ に対して $g(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx$ と定める。$t \to \infty$ のとき $g(t) - at^b$ が収束するような正の実数 a, b を求めよ。

11 次の問いに答えよ。

(1) 5 以上の素数は，ある自然数 n を用いて $6n+1$ または $6n-1$ の形で表されることを示せ。

(2) N を自然数とする。$6N-1$ は，$6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数を約数にもつことを示せ。

(3) $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数は無限に多く存在することを示せ。

12 aを実数とするとき，関数

$$f(x) = x + a^2 - 2, \quad g(x) = x(x-a)(x-a-2)$$

について，次の問いに答えよ。

(1) 命題「$f(x) \geqq 0 \Longrightarrow g(x) \geqq 0$」がすべての実数$x$について成り立つために$a$が満たすべき条件を求めよ。

(2) 命題「$x \geqq 0 \Longrightarrow$「$f(x) \geqq 0$または$g(x) \geqq 0$」」がすべての実数$x$について成り立つために$a$が満たすべき条件を求めよ。