$\boxed{1}$ 放物線 $y=f(x)$ を x 軸方向に -2, y 軸方向に 2 だけ平行移動したところ，放物線

$$y = x^2 + 2(2-a)x + 2(1-2a)$$

が得られた。ただし，a は定数である。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ が $1 \leqq x \leqq 4$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 三角形 ABC において，$\angle$A の 2 等分線が辺 BC と交わる点を D とする。

(1) AB : AC = BD : DC を証明せよ。

(2) AB $= 2$, AC $= 4$, AD $= 1$ のとき，辺 BC の長さと三角形 ABC の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ n 枚のカードの表に $1, 2, \cdots, n$ の数をそれぞれ 1 つずつ書く。この n 枚のカードを裏返しにして，よくまぜ，重ねて，上から順に $1, 2, \cdots, n$ の数を書く。表と裏に書かれた数が一致するカードが 1 枚もない確率を p_n とする。

(1) p_3 を求めよ。

(2) $n = 4$ のとき，表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数の期待値を求めよ。

(3) p_5 を求めよ。

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2$$

$$a_n = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)a_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

で定める。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 放物線 $C : y = x^2$ 上の 2 点 A, B は，直線 AB と C で囲まれる図形の面積が $\dfrac{1}{6}$ になる，という条件を満たしながら C 上を動くとする。このとき，直線 AB が通りうる点の範囲を求め，図示せよ。

6 R を平面上の凸 6 角形とし，その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおく。

R が $\overrightarrow{\mathrm{ED}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{FE}} = \vec{b}$ を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{c}$ であることを示せ。

(2) 三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の間の関係を求めよ。

(3) R が (2) の条件を満たし，さらに内積に関して $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$ を満たすとき，R の面積を求めよ。

$\boxed{7}$ 実数 t に対して，u の 3 次方程式 $u^3 - 3u + 2t = 0$ の実数解のうちで絶対値が最小のものを $f(t)$ とする。

(1) 媒介変数 t を用いて

$$x = f(t), \quad y = -2t \qquad (t \text{ は実数})$$

と表される曲線を図示せよ。

(2) 関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め，$f(t)$ のグラフをかけ。

$\boxed{8}$ n を自然数とする。関数

$$f(x) = (1 - \tan^4 x) \tan^n x \qquad (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4})$$

のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積が $\dfrac{2}{35}$ であるとき，$f(x)$ の最大値を求めよ。

9 関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して定義され，すべての実数 x で微分可能であるとする。このとき，以下の命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例をあげよ。

(1) $x_1 < x_2$ を満たすすべての実数 x_1, x_2 に対して $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つとする。このとき，すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ である。

(2) $f(0) = 0$ かつ，すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば，$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ である。

(3) $f(0) = 0$ かつ，すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば，$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = +\infty$ である。

$\boxed{\mathbf{10}}$ a は定数とし，n は 2 以上の整数とする。関数

$$f(x) = ax^n \log x - ax \qquad (x > 0)$$

の最小値が -1 のとき，定積分

$$\int_1^e f(x)\,dx$$

の値を n と自然対数の底 e を用いて表せ。

●M32(057—39)

$\boxed{\mathbf{11}}$ p を素数とする。x に関する 2 次方程式

$$px^2 + (5 - p^2)x - 3p = 0$$

が整数の解を持つのは $p = 2$ のときに限ることを示せ。

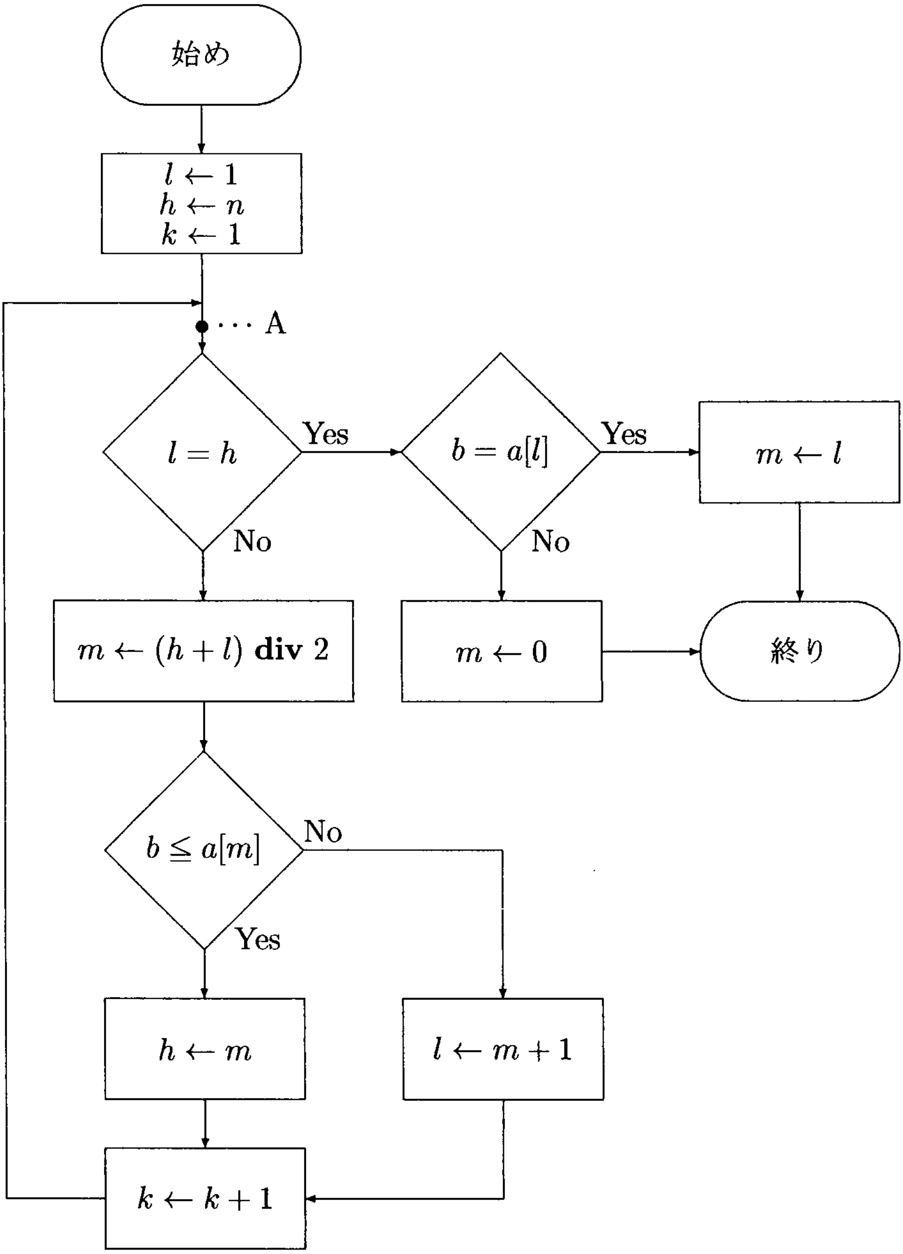
$\boxed{\mathbf{12}}$-[ア] 配列(添え字付き変数) a において，$a[1], a[2], \ldots, a[n]$ には異なる整数の値が小さい順に入っている。このとき，次頁の流れ図は値 b が

$$a[1],\ a[2],\ \ldots,\ a[n]$$

の中に現れるかどうかを判定し，現れたら $b = a[m]$ となる m を返し，現われなければ 0 を返すプログラムに対応している。そのプログラムについて以下の問いに答えよ。ただし，$(h+l)\ \mathbf{div}\ 2$ は $h+l$ を 2 で割った商の整数部分を表している。

(1) $n = 16$ とし，$a[5] < b < a[6]$ であったとする。このプログラムの実行開始から終了までの，流れ図中の A 点における k, l, h の値の表を作成せよ。

(2) ある自然数 p に対して $n = 2^p$ と表せるとき，A 点で成立している k, l, h, p の関係式を求め，プログラムが終了したときの k を p を使って表せ。ただし，証明は述べなくてよい。



始め
$l \leftarrow 1$
$h \leftarrow n$
$k \leftarrow 1$
$\cdots$ A
$l = h$
Yes
No
$b = a[l]$
Yes
No
$m \leftarrow l$
$m \leftarrow (h + l)$ **div** 2
$m \leftarrow 0$
終り
$b \leq a[m]$
No
Yes
$h \leftarrow m$
$l \leftarrow m + 1$
$k \leftarrow k + 1$

$\boxed{\mathbf{12}}$－[イ] R を平面上の凸６角形とし，その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおく。

R が $\overrightarrow{\mathrm{ED}} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{FE}} = \overrightarrow{b}$ を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{c}$ であることを示せ。

(2) 三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき，$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ の間の関係を求めよ。

(3) R が (2) の条件を満たし，さらに内積に関して $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 4$, $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 1$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = -1$ を満たすとき，R の面積を求めよ。

$\boxed{13}$-［ア］ a を実数とし，z を複素数とする。複素数平面上で，a, z, z^2, z^3 が表す 4 点が，ある正方形の 4 頂点になるとする。ただし，a と z^2 が表す頂点は対角線上にあるとする。このような a と z の値をすべて求めよ。

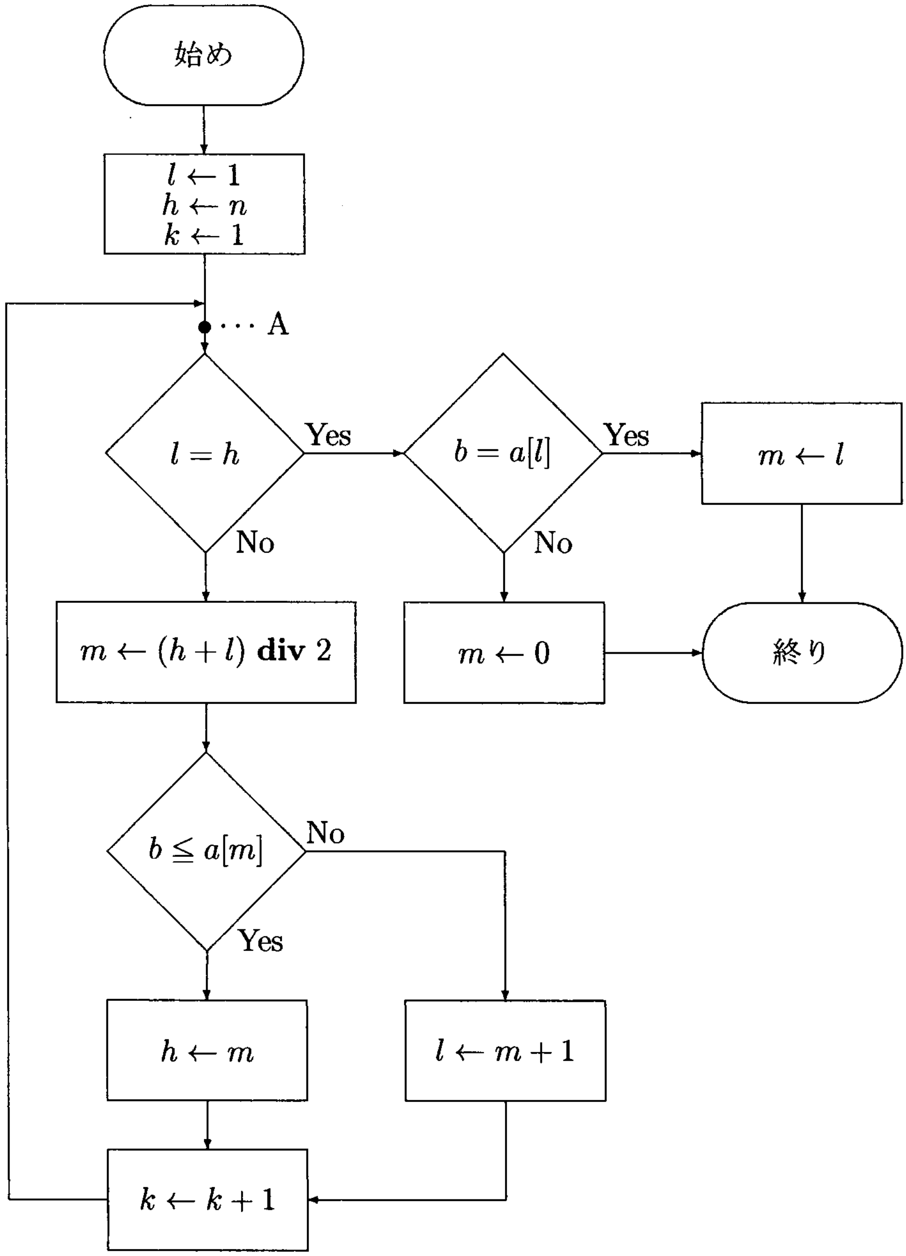
13 - [イ] 配列 (添え字付き変数) a において，$a[1], a[2], \ldots, a[n]$ には異なる整数の値が小さい順に入っている。このとき，次頁の流れ図は値 b が

$$a[1],\ a[2],\ \ldots,\ a[n]$$

の中に現れるかどうかを判定し, 現れたら $b = a[m]$ となる m を返し, 現われなければ 0 を返すプログラムに対応している。そのプログラムについて以下の問いに答えよ。ただし，$(h+l)$ **div** 2 は $h+l$ を 2 で割った商の整数部分を表している。

(1) $n = 16$ とし, $a[5] < b < a[6]$ であったとする。このプログラムの実行開始から終了までの，流れ図中の A 点における k, l, h の値の表を作成せよ。

(2) ある自然数 p に対して $n = 2^p$ と表せるとき，A 点で成立している k, l, h, p の関係式を求め，プログラムが終了したときの k を p を使って表せ。ただし，証明は述べなくてよい。


始め
$l \leftarrow 1$
$h \leftarrow n$
$k \leftarrow 1$
・・・A
$l = h$
Yes
No
$b = a[l]$
Yes
No
$m \leftarrow l$
$m \leftarrow (h + l)$ **div** 2
$m \leftarrow 0$
終り
$b \leqq a[m]$
No
Yes
$h \leftarrow m$
$l \leftarrow m + 1$
$k \leftarrow k + 1$

$\boxed{\mathbf{13}}$ - [**ウ**] n 枚のカードの表に $1, 2, \cdots, n$ の数をそれぞれ 1 つずつ書く。この n 枚のカードを裏返しにして，よくまぜ，重ねて，上から順に $1, 2, \cdots, n$ の数を書く。表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数を X とする。

(1) $n = 4$ のとき，X の期待値を求めよ。

(2) $n = 5$ のとき，$X = 0$ となる確率を求めよ。

(3) $n = 5$ のとき，条件 $X \geqq 1$ の下で，$X = 1$ となる条件つき確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{14}}$ - [**ア**] a を実数とし，z を複素数とする。複素数平面上で，a, z, z^2, z^3 が表す 4 点が，あるひし形の 4 頂点になるとする。ただし，a と z^2 が表す頂点は対角線上にあるとする。このような a と z の値をすべて求めよ。

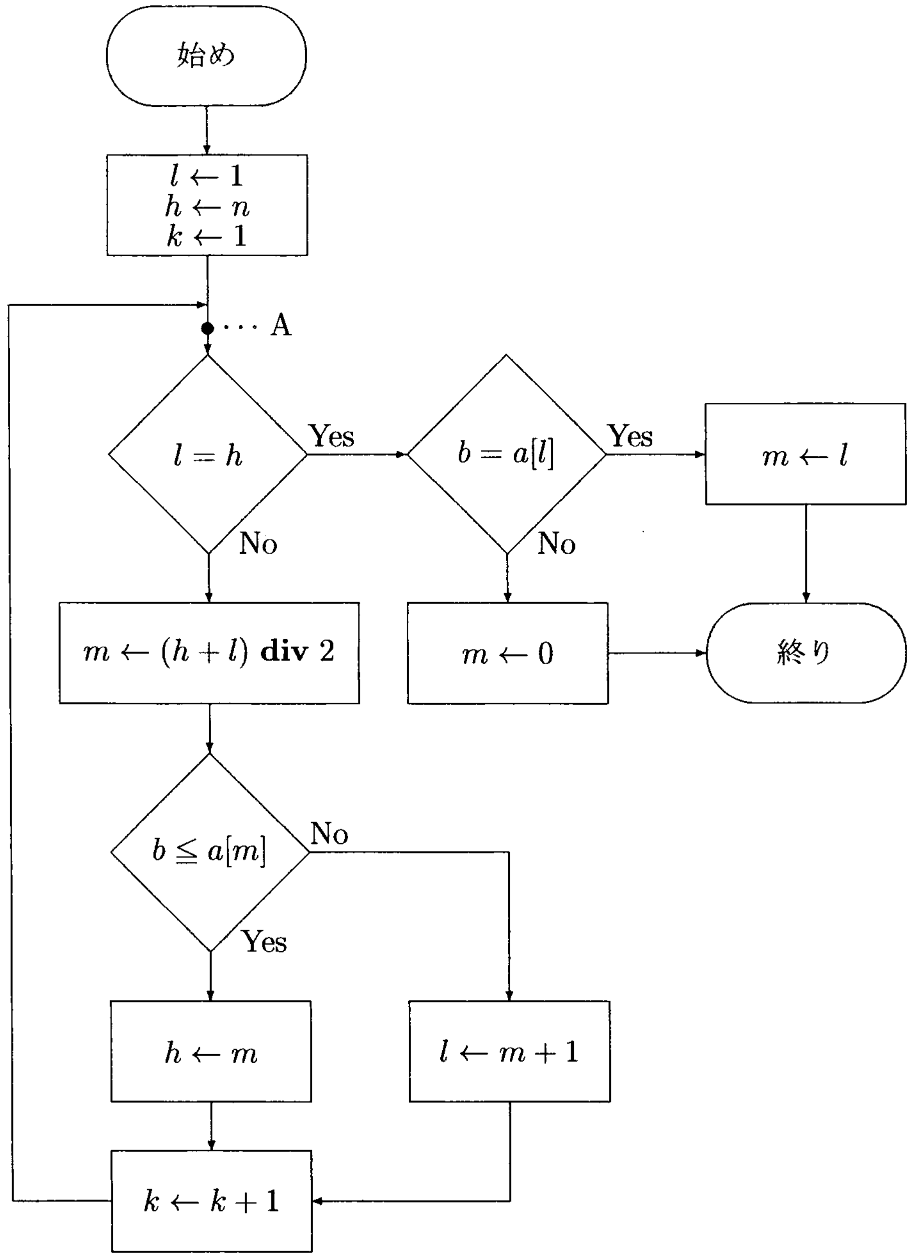
$\boxed{14}$ - [イ] 配列 (添え字付き変数) a において，$a[1], a[2], \ldots, a[n]$ には異なる整数の値が小さい順に入っている。このとき，次頁の流れ図は値 b が

$$a[1],\ a[2],\ \ldots,\ a[n]$$

の中に現れるかどうかを判定し, 現れたら $b = a[m]$ となる m を返し, 現われなければ 0 を返すプログラムに対応している。そのプログラムについて以下の問いに答えよ。ただし，$(h+l)$ **div** 2 は $h+l$ を 2 で割った商の整数部分を表している。

(1) $n = 16$ とし, $a[5] < b < a[6]$ であったとする。このプログラムの実行開始から終了までの，流れ図中の A 点における k, l, h の値の表を作成せよ。

(2) ある自然数 p に対して $n = 2^p$ と表せるとき，A 点で成立している k, l, h, p の関係式を求め，プログラムが終了したときの k を p を使って表せ。ただし，証明は述べなくてよい。


始め
$l \leftarrow 1$
$h \leftarrow n$
$k \leftarrow 1$
$\cdots$ A
$l = h$
Yes
No
$b = a[l]$
Yes
No
$m \leftarrow l$
$m \leftarrow (h + l)$ **div** 2
$m \leftarrow 0$
終り
$b \leqq a[m]$
No
Yes
$h \leftarrow m$
$l \leftarrow m + 1$
$k \leftarrow k + 1$

$\boxed{14}$ - [ウ] k を整数とし q を実数とする。A, B の 2 人が次のようなゲームを行う。まず A が 3 枚の硬貨を投げ，表の出た枚数を X とする。$X > k$ なら A の勝ち，$X < k$ なら B の勝ちとする。$X = k$ のときは当たる確率が q のくじを A が引き，当たれば A の勝ち，そうでなければ B の勝ちとする。A, B とも，勝った場合には $X + 1$ 円の賞金がもらえ，負けた場合には何ももらえない (0 円もらう) とする。ここで k および q の値は，A と B のもらう賞金の期待値が等しくなるように定める。

(1) k と q の値を求めよ。

(2) 上のゲームを 2 回行ったとき，B の賞金総額が 3 円であった。このとき，A の賞金総額も 3 円である条件付き確率を求めよ。