1 k を実数とし， $f(x)=x^2-kx+3k$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数を調べよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ が表す放物線の頂点の y 座標が 1 以上となるような最大の整数 k を求めよ。

2 直角三角形 $\mathrm{OP_1Q_1}, \mathrm{OP_2Q_2}, \mathrm{OP_3Q_3}, \cdots$ がある。ただし 各 n について，$\angle\mathrm{O}$ は直角で，$\angle\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ は n に無関係で一定な角 θ である。一辺 OP_n の長さを a_n とおくと，$\{a_n\}$ は初項 1 ，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列をなすとする。

このとき次の問いに答えよ。

(1) 辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ の長さを n と θ を用いて表せ。

(2) 斜辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ を一辺とする正方形の面積を S_n とするとき，

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

を n と θ を用いて表せ。

(3) S_n を (2) のように定めるとき，

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 90$$

をみたす角 θ の値を求めよ。

3 座標平面上に，中心がそれぞれ点$(0, 1)$, 点$(2, 1)$で，同じ半径1をもつ2つの円C_1とC_2がある。次の問いに答えよ。

(1) 2円C_1, C_2とx軸に接するように円C_3を描く。このとき 円C_3の中心の座標を求めよ。

(2) さらに，2円C_1, C_3とx軸に接するように円C_2とは異なる円C_4を描く。このとき 円C_4の中心の座標を求めよ。

4 1から9までの番号が書かれたカードがそれぞれ1枚ずつある。この9枚のカードをよくきって重ねた後，上から3枚のカードを順に左から並べて，3桁の数を作る。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 3桁の数が500以上である確率を求めよ。

(2) 3桁の数が500以上の偶数である確率を求めよ。

5 次の問いに答えよ。ただし同じ色の玉は区別できないものとし，空の箱があってもよいとする。

(1) 赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。

(2) 赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。

(3) 赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか求めよ。

6 実数 t に対して，$f(t)$ を

$$f(t)=\int_0^1 |x^2-tx|\,dx$$

と定める。$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。

7 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{0}$$

をみたしている。このとき次の問いに答えよ。

(1) 直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。

(2) 四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。

8 座標空間内に２点 A $(1, 0, 0)$ と B $(-1, 0, 0)$ がある。不等式

$$\angle APB \geqq 135^\circ$$

をみたす空間内の点 P の全体の集合に，２点 A, B をつけ加えてできる立体の体積を求めよ。

9 行列 E と A を

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

とおく。行列 $xE-A$ が逆行列をもたないような x の 2 つの値を α,β $(\alpha>\beta)$ とし，行列 P,Q を

$$P=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix}\alpha+1 & 3\\ 2 & \alpha-4\end{pmatrix},\quad Q=\frac{1}{\beta-\alpha}\begin{pmatrix}\beta+1 & 3\\ 2 & \beta-4\end{pmatrix}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 行列の積 PQ を計算せよ。

(2) 自然数 n に対して，P^n を求めよ。

(3) すべての自然数 n に対して，

$$A^n=\alpha^nP+\beta^nQ$$

が成立することを示せ。

10 次の問いに答えよ。

(1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。

(2) n が正の整数のとき，$\log_2 n$ が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ。

11 n を 2 以上の整数とし，

$$I(x)=\int_0^x \sin t\ \sin nt\,dt \qquad (x \geqq 0)$$

と定める。

(1) $n=2$ のとき，$I(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $I(x)$ の最大値が

$$\frac{n}{n^2-1}$$

であるならば，n は偶数であることを証明せよ。

12 無限数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c$$
$$a_{n+1} = \frac{{a_n}^2 - 1}{n} \quad (n \geqq 1)$$

で定める。ここで c は定数とする。

(1) $c = 2$ のとき，一般項 a_n を求めよ。

(2) $c \geqq 2$ ならば，$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ となることを示せ。

(3) $c = \sqrt{2}$ のとき，$\lim_{n \to \infty} a_n$ の値を求めよ。

$\boxed{13}$ -［ア］

次の問いに答えよ。

(1) 複素数平面上で方程式

$$|z - 3i| = 2|z|$$

が表す図形を求め，図示せよ。

(2) 複素数 z が (1) で求めた図形の上を動くとき，複素数

$$w = (-1 + i)z$$

が表す点の軌跡を求め，図示せよ。

$\boxed{13}$ - [イ]

配列 (添え字付き変数) a において，$a[0], a[1], a[2], \ldots, a[n]$ には，異なる整数の値が入っている。このとき，次頁の流れ図は

$$a[1],\ a[2],\ \ldots,\ a[n]$$

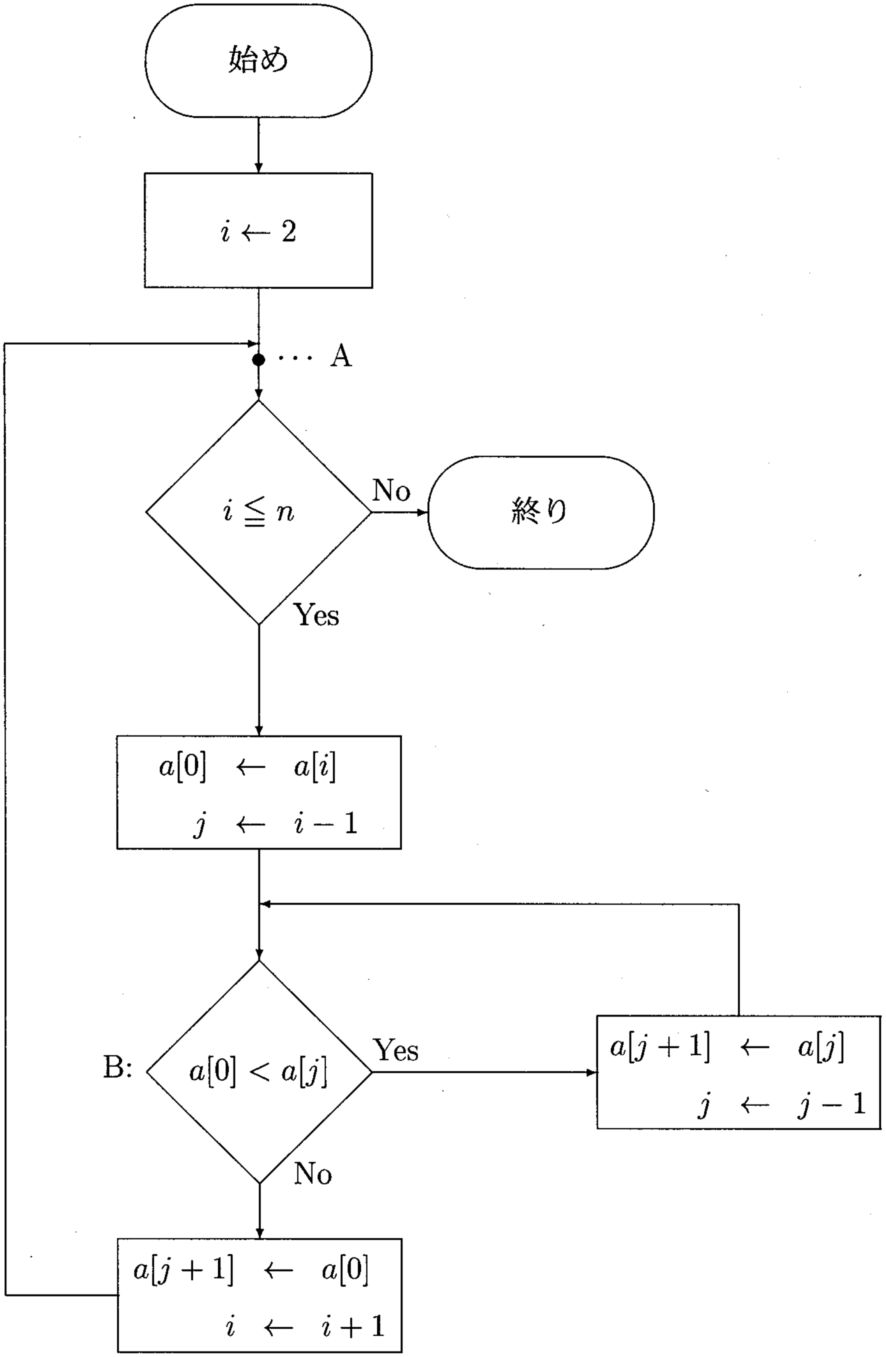
の値を小さい順に並べかえるプログラムに対応している。このプログラムについて以下の問いに答えよ。ただし，長方形で囲まれた複数の処理は上から順に行われるものとする。

(1) $n = 4$ とし,「始め」においては

$$a[0] = 0,\ a[1] = 5,\ a[2] = 2,\ a[3] = 7,\ a[4] = 3$$

であったとする。このプログラムの実行開始から終了までの，A 点における i の値と $a[k]$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ の値の表を作成せよ。

(2) B 点の判定 $a[0] < a[j]$ の回数は, $a[k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ の初期値により異なる。この判定回数がもっとも少ない場合の判定の回数を自然数 n を用いて表せ。またそのような $a[k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ の初期値の例を示せ。ただし，いずれも証明を述べなくてよい。


始め
$i \leftarrow 2$
… A
$i \leqq n$
No
終り
Yes
$a[0] \leftarrow a[i]$
$j \leftarrow i-1$
B:
$a[0] < a[j]$
Yes
$a[j+1] \leftarrow a[j]$
$j \leftarrow j-1$
No
$a[j+1] \leftarrow a[0]$
$i \leftarrow i+1$

$\boxed{14}$ - [ア]

次の問いに答えよ。

(1) 複素数平面上で方程式

$$|z-3i|=2|z|$$

が表す図形を求め，図示せよ。

(2) 複素数 z が (1) で求めた図形から $z=i$ を除いた部分を動くとき，複素数 $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ で表される点の軌跡を求め，図示せよ。

●M34(185—17)

$\boxed{\mathbf{14}}$ - [**イ**]

配列 (添え字付き変数) a において，$a[0], a[1], a[2],\ldots, a[n]$ には異なる整数の値が入っている。このとき，次頁の流れ図は

$$a[1],\ a[2],\ \ldots,\ a[n]$$

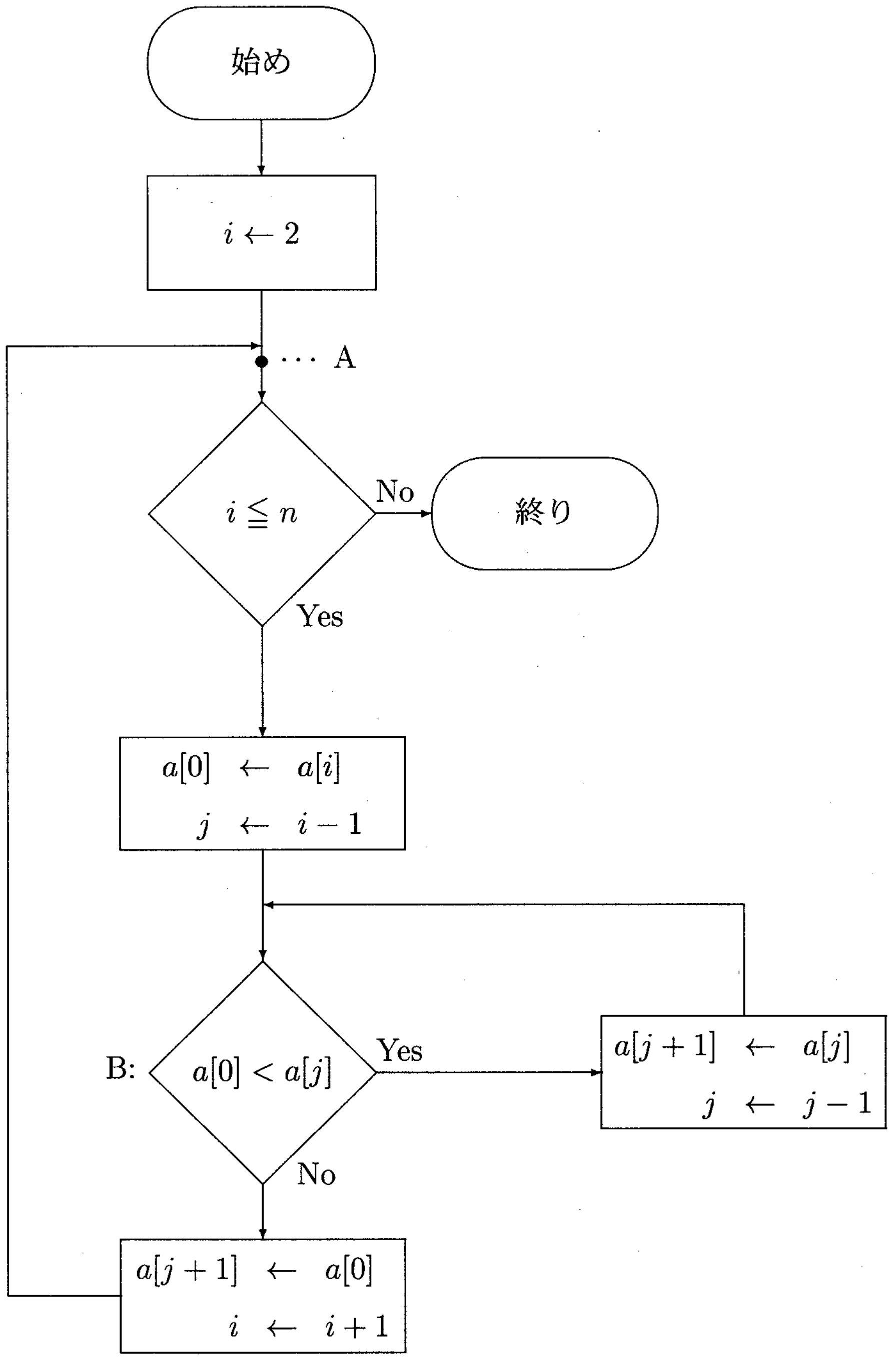
の値を小さい順に並べかえるプログラムに対応している。そのプログラムについて以下の問いに答えよ。ただし，長方形で囲まれた複数の処理は上から順に行われるものとする。

(1) $n=4$ とし,「始め」においては

$$a[0]=0,\ a[1]=5,\ a[2]=2,\ a[3]=7,\ a[4]=3$$

であったとする。このプログラムの実行開始から終了までの，A 点における i の値と $a[k]$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$ の値の表を作成せよ。

(2) B 点の判定 $a[0]<a[j]$ の回数は， $a[k]$ $(k=1, 2,\ldots, n)$ の初期値により異なる。この判定回数がもっとも少ない場合と，もっとも多い場合について，それぞれ判定の回数を自然数 n を用いて表せ。またそれぞれの場合に対応する $a[k]$ $(k=1, 2,\ldots, n)$ の初期値の例を示せ。ただし，いずれも証明を述べなくてよい。


始め
$i \leftarrow 2$
$\cdots$ A
$i \leqq n$
No
終り
Yes
$a[0] \leftarrow a[i]$
$j \leftarrow i-1$
B:
$a[0] < a[j]$
Yes
$a[j+1] \leftarrow a[j]$
$j \leftarrow j-1$
No
$a[j+1] \leftarrow a[0]$
$i \leftarrow i+1$

$\boxed{\textbf{14}}$ - [ウ]

1 から 10 までの番号が書かれた札が 1 枚ずつある。この 10 枚の札から無作為に 5 枚の札を取り出す。このとき，取り出された札のうち，番号が 5 以下であるものの枚数を X とおく。次の問いに答えよ。

(1) X の確率分布を求めよ。

(2) X の平均 $E[X]$ および分散 $V[X]$ を求めよ。

(3) $X = 5$ のときは 10,000 円，$X = 4$ のときは 1,000 円，$X = 3$ のときは 100 円の賞金がもらえるが，その他の場合はもらえないものとする。賞金の期待値を求めよ。