$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とする。このとき，n^2 を 4 で割った余りは0 または 1 であることを証明せよ。

(2) 3 つの自然数 a, b, c が

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たしている。このとき，a, b の少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。

2 実数 a に対して

$$f(x) = ax^2 - 2ax + a^2 + 1$$

とおく。

(1) 定積分

$$I(a) = \int_1^2 f(x)dx$$

を a を用いて表せ。

(2) $f(x)$ が条件 $f(1) \leqq 1$ を満たすような a の範囲を求めよ。

(3) a が (2) の範囲を動くとき，$I(a)$ の最大値および最小値を求めよ。

3 a, b を整数とする。3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx$ が，$0 < x < 2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき，a, b の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a, b, c, d は実数) に対して，実数 $f(A)$ を $f(A) = a + d$ と定義する。これについて性質

$$f(A \pm B) = f(A) \pm f(B) \qquad \text{(複号同順)}$$

は証明なしで使ってよい。

(1) 2次正方行列 A, B に対して，$f(AB) = f(BA)$ を証明せよ。

(2) 2次正方行列 P, Q が $P = PQ - QP$ を満たしているとする。このとき，$f(P) = 0$ を証明せよ。

(3) (2) の P に対して，$f(P^2) = 0$ を証明せよ。

(4) (2) の P に対して，$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を証明せよ。

$\boxed{5}$ C は，2 次関数 $y = x^2$ のグラフを平行移動した放物線で，頂点が円 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ 上にある。原点から C に引いた接線で傾きが正のものを l とおく。このとき，C と l の接点の x 座標が最大および最小になるときの C の頂点の座標をそれぞれ求めよ。

6 a, b を実数，e を自然対数の底とする。すべての実数 x に対して $e^x \geqq ax + b$ が成立するとき，以下の問いに答えよ。

(1) a, b の満たすべき条件を求めよ。

(2) 次の定積分

$$\int_0^1 (e^x - ax - b)dx$$

の最小値と，そのときの a, b の値を求めよ。

7 数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ を次のように定義する。

$$a_n = \tan\frac{\pi}{2^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 次の無限級数の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$\boxed{8}$ 30の階乗 30! について，以下の問いに答えよ。

(1) 2^k が 30! を割り切るような最大の自然数 k を求めよ。

(2) 30! の一の位は 0 である。ここから始めて十の位，百の位と順に左に見ていく。最初に 0 でない数字が現れるまでに，連続していくつの 0 が並ぶかを答えよ。

(3) (2) において，最初に現れる 0 でない数字は何であるかを理由とともに答えよ。

$\boxed{9}$ -［ア］ i を虚数単位とし，複素数 z に共役な複素数を $\overline{z}$ で表す。

(1) a を実数の定数とする。条件

$$1-\overline{z}=(a+i)(z-\overline{z})$$

を満たす複素数平面上の点 z の全体が直線であるとき，a の値を求めよ。

(2) 実軸上にない複素数 α に対して，3 点 0, 1, α を通る複素数平面上の円の中心を β とする。このとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3) α, β を (2) の複素数とする。点 α が (1) の直線上を動くとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は一定であることを証明せよ。

$\boxed{9}$ - [イ] 正の整数 x と y が与えられたとき，以下の手順による計算を行う。

1. $\mathrm{n} \leftarrow x$,　$\mathrm{m} \leftarrow y$,　$\mathrm{q} \leftarrow 0$

2. $\mathrm{m} > 0$ かつ $\mathrm{q} \leqq 2$ を満たしている限り，次の計算を繰り返し実行する。ただし，n を m で割った商を $\mathrm{n}\,\mathbf{div}\,\mathrm{m}$，余りを $\mathrm{n}\,\mathbf{mod}\,\mathrm{m}$ で表す。

   2-1. $\mathrm{q} \leftarrow \mathrm{n}\,\mathbf{div}\,\mathrm{m}$,　$\mathrm{r} \leftarrow \mathrm{n}\,\mathbf{mod}\,\mathrm{m}$

   2-2. $\mathrm{n} \leftarrow \mathrm{m}$,　$\mathrm{m} \leftarrow \mathrm{r}$

3. $\mathrm{q} > 2$ ならば 0 を，そうでなければ n の値を出力する。

この手順に関して，以下の問いに答えよ。

(1) x を 95，y を 35 としたとき，手順 2 の各繰り返しにおいて 2-1 を実行する直前での変数 n, m, q の値の変化を示す表を作成し，手順 3 で出力される数を示せ。

(2) 変数 n, m の値をそれぞれ x_2, x_1 とし，その状態で 2-1 と 2-2 を続けて実行したところ，変数 m, q の値がそれぞれ x_0, z になったとする。このとき，x_2 を x_1, x_0, z を使って表せ。

(3) x と y の両方が 200 以上でかつ出力が 7 になるような x と y を 1 組あげ，その組について (1) と同様の表を作成せよ。

$\boxed{10}$ - [ア]　i を虚数単位とし，複素数 z に共役な複素数を $\overline{z}$ で表す。

(1) a を実数の定数とする。条件

$$1-\overline{z}=(a+i)(z-\overline{z})$$

を満たす複素数平面上の点 z の全体が直線であるとき，a の値を求めよ。

(2) 実軸上にない複素数 α に対して，3 点 0, 1, α を通る複素数平面上の円の中心を β とする。このとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3) α, β を (2) の複素数とする。点 α が (1) の直線上を動くとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は一定であることを証明せよ。

$\boxed{10}$ - [イ] 正の整数 x と y が与えられたとき，以下の手順による計算を行う。

1. $\mathrm{n} \leftarrow x$,　$\mathrm{m} \leftarrow y$,　$\mathrm{q} \leftarrow 0$

2. $\mathrm{m} > 0$ かつ $\mathrm{q} \leqq 2$ を満たしている限り，次の計算を繰り返し実行する。ただし，n を m で割った商を $\mathrm{n}\,\mathbf{div}\,\mathrm{m}$，余りを $\mathrm{n}\,\mathbf{mod}\,\mathrm{m}$ で表す。

   2-1. $\mathrm{q} \leftarrow \mathrm{n}\,\mathbf{div}\,\mathrm{m}$,　$\mathrm{r} \leftarrow \mathrm{n}\,\mathbf{mod}\,\mathrm{m}$

   2-2. $\mathrm{n} \leftarrow \mathrm{m}$,　$\mathrm{m} \leftarrow \mathrm{r}$

3. $\mathrm{q} > 2$ ならば 0 を，そうでなければ n の値を出力する。

この手順に関して，以下の問いに答えよ。

(1) x を 95，y を 35 としたとき，手順 2 の各繰り返しにおいて 2-1 を実行する直前での変数 n, m, q の値の変化を示す表を作成し，手順 3 で出力される数を示せ。

(2) 変数 n, m の値をそれぞれ x_2, x_1 とし，その状態で 2-1 と 2-2 を続けて実行したところ，変数 m, q の値がそれぞれ x_0, z になったとする。このとき，x_2 を x_1, x_0, z を使って表せ。

(3) x と y の両方が 200 以上でかつ出力が 7 になるような x と y を 1 組あげ，その組について (1) と同様の表を作成せよ。

$\boxed{10}$ - [ウ] 2つの野球チームA, Bが繰り返し試合を行う。各試合において，Aが勝つ確率を p，Bが勝つ確率を $q = 1 - p$ とする。ただし $0 < p < 1$ とする。

(1) $p = \dfrac{1}{2}$ とする。A, Bどちらかが4勝するまでに行う試合数を表す確率変数を X とする。X の確率分布を求めよ。

(2) Bより先にAが n 勝する確率を $P(n)$ とする。$P(3)$ と $P(4)$ の大小を比較せよ。