1 2次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ について以下の問いに答えよ。ただし，$a < 0$ とする。

(1) $f(x)$ を x で割った余りと $x+1$ で割った余りとが一致しているとする。このとき，$a = b$ になることを示せ。

(2) (1) の関数が，さらにつぎの (i), (ii) を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

(i) 曲線 $y = f(x)$ が直線 $y = x$ と接する。

(ii) 曲線 $y = f(x)$ と3直線 $y = 0, x = -1, x = 0$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{5}{6}$ である。

2 数列 $\{a_n\}$ はつぎの (i), (ii) を満たすとする。

(i) $a_1 = \dfrac{1}{2}$

(ii) $n \geqq 2$ について，

$$a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$$

ただし，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ である。

(1) a_2 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ に対して，S_n を S_{n-1} で表せ。

(3) S_n を求めよ。

(4) $n \geqq 2$ に対して，a_n を求めよ。

3 三角形 ABC において，辺 BC 上に点 D があり，

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{CAD} = 30^\circ$$

である。$\mathrm{AB} = p, \mathrm{AC} = q$ とおく。

(1) AD の長さを p, q で表せ。

(2) $p + q = 1$ を満すとき，$\triangle\mathrm{ABD}$ の面積と $\triangle\mathrm{ACD}$ の面積の差の絶対値が最大になる p の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 座標空間内の 6 点

$$A(0,0,1),\quad B(1,0,1),\quad C(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$$
$$D(0,0,0),\quad E(1,0,0),\quad F(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$$

がある。動点 P は A を出発し，B, C, A の順に △ABC の周を一定の速さで一周する。 P と同時に動点 Q は E を出発し，F, D, E の順に △DEF の周を P と同じ速さで一周する。線分 PQ が動いて作られる図形と △ABC, △DEF によって囲まれる立体を K とする。

(1) $\mathrm{AP}=t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$ のとき，点 Q の座標を t で表せ。

(2) (1) の P, Q に対して, 線分 PQ と平面 $z=a \quad (0 \leqq a \leqq 1)$ との交点 $\mathrm{R}(t)$ の座標を求めよ。

(3) 平面 $z=a \quad (0 \leqq a \leqq 1)$ による K の切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) K の体積 V を求めよ。

5 長さ 1 の棒 PQ が座標平面上にある。P は A$(1,0)$ から出発し，x 軸上を原点 O まで動き，Q は O を出発し，B$(0,1)$ まで y 軸上を動く。この棒の上に動点 R があり，つねに $\mathrm{PR} = \mathrm{AP}$ であるとする。

(1) $\angle \mathrm{OQP} = \theta$ としたとき，R の座標を θ で表せ。

(2) R が動いてできる曲線と x 軸，y 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ。

6 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ を X とし，$\begin{pmatrix} 2.1 & 1 \\ -4 & -1.9 \end{pmatrix}$ の逆行列を A とする。

(1) X^2 を計算せよ。

(2) A を $pE+qX$ の形で表せ。ただし，E は単位行列とし，p, q は実数とする。

(3) A^n の 4 つの成分のうちの最大のものが 10^{10} を超える最小の自然数 n を求めよ。

7 n が 3 以上の整数のとき，

$$x^n + 2y^n = 4z^n$$

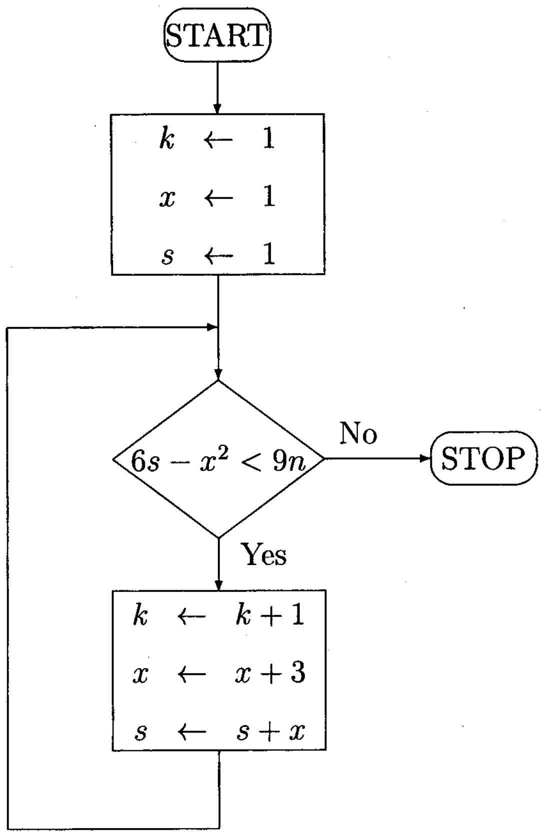
を満たす整数 x, y, z は $x = y = z = 0$ 以外に存在しないことを証明せよ。

$\boxed{8}$ - [ア] t は $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数とし，$\alpha = ti$, $\beta = 1$ とおく。ここで, i は虚数単位である。複素数 γ はその実部と虚部が正であるものとし, 複素数平面上で，α, β, γ は正三角形をなすとする。

(1) $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ を求めよ。

(2) t が 0 から 1 まで変わるとき，γ が描く図形を図示せよ。

8 - [**イ**] 下の流れ図に対応するプログラムについて，終了したときの k, x, s の値を自然数 n を用いて表せ。ただし，一つの長方形で囲まれた複数の処理は上から順に行われるものとする。

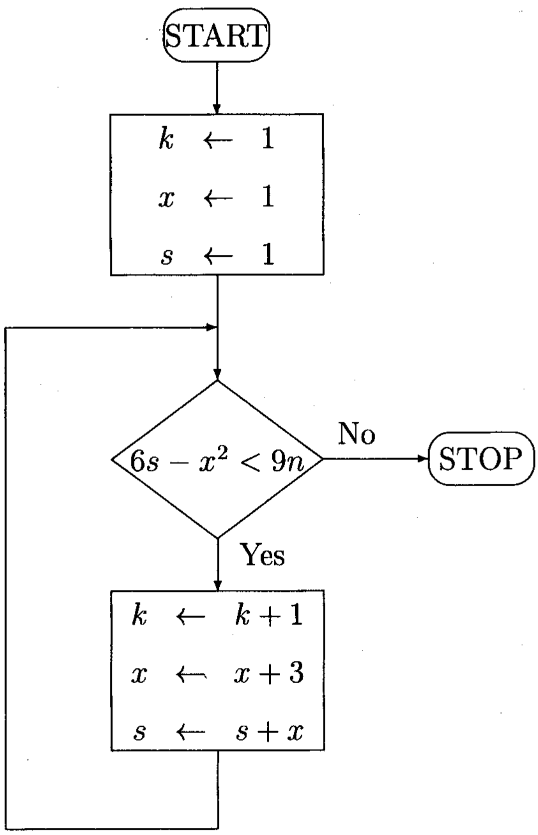


$\boxed{\textbf{9}}$ - [**ア**] t は $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数とし，$\alpha = ti$, $\beta = 1$ とおく。ここで, i は虚数単位である。複素数 γ はその実部と虚部が正であるものとし, 複素数平面上で，α, β, γ は正三角形をなすとする。

(1) $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ を求めよ。

(2) t が 0 から 1 まで変わるとき，γ が描く図形を図示せよ。

9 - [**イ**] 下の流れ図に対応するプログラムについて，終了したときの k, x, s の値を自然数 n を用いて表せ。ただし，一つの長方形で囲まれた複数の処理は上から順に行われるものとする。



9 - [ウ] X, Y はどちらも $1, -1$ の値をとる確率変数で，それらは

$$P(X=1, Y=1) = P(X=-1, Y=-1) = a$$
$$P(X=1, Y=-1) = P(X=-1, Y=1) = \frac{1}{2} - a$$

を満たしているとする。ただし，a は $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ を満たす定数とする。

(1) 確率 $P(X=-1)$ と $P(X=1)$ を求めよ。

(2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

(3) 2 つの確率変数の和 $X+Y$ の確率分布を求めよ。

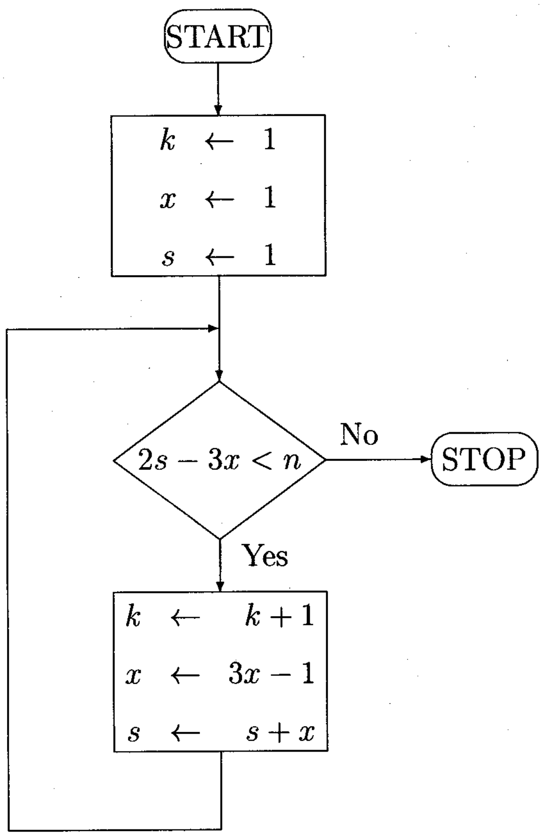
(4) X と Y が互いに独立であるための a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{10}}$ - [**ア**] s, t は $0 < s < 1, 0 < t < 1$ を満たす実数とし，$\alpha = si, \beta = t$ とおく。ここで i は虚数単位である。複素数 γ は実部および虚部が正であるものとし, 複素数平面上で α, β, γ は正三角形をなすとする。

(1) $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ を求めよ。

(2) s, t が上記の範囲を動くとき，γ が描く図形を図示せよ。

10 - [イ] 下の流れ図に対応するプログラムについて，終了したときの k, x, s の値を自然数 n を用いて表せ。ただし，一つの長方形で囲まれた複数の処理は上から順に行われるものとする。



$\boxed{10}$ - [ウ] X, Y はどちらも $1, -1$ の値をとる確率変数で，それらは

$$P(X=1, Y=1) = P(X=-1, Y=-1) = a$$
$$P(X=1, Y=-1) = P(X=-1, Y=1) = \frac{1}{2} - a$$

を満たしているとする。ただし，a は $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ を満たす定数とする。

(1) 確率 $P(X=-1)$ と $P(X=1)$ を求めよ。

(2) 2 つの確率変数の和の $X+Y$ の確率分布を求めよ。

(3) 2 つの確率変数の和の期待値 $E(X+Y)$ と分散 $V(X+Y)$ を求めよ。

(4) X と Y が互いに独立であるための a の値を求めよ。