

数 学

(数Ⅰ，数Ⅱ，数Ⅲ，数A，数B)

9：00～11：00

注 意

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはならない。
2. 問題紙は3ページある。
3. 解答用紙は

解答用紙番号
数学0—1

 (問Ⅰ用)，

解答用紙番号
数学0—2

 (問Ⅱ用)，

解答用紙番号
数学0—3

 (問Ⅲ用)，

解答用紙番号
数学0—4

 (問Ⅳ用)，

解答用紙番号
数学0—5

 (問Ⅴ用)の5枚である。
4. 解答用紙は5枚とも全部必ず提出せよ。
5. 受験番号および座席番号(上下2箇所)は，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。
6. 各問に対する解答は，それぞれ3で指定された解答用紙に記入せよ。
ただし，裏面を使用してはならない。
7. 必要以外のことを解答用紙に書いてはならない。
8. 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。
9. 下書き用紙は回収しない。

解 答 上 の 注 意

採点時には，結果を導く過程を重視するので，必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

- 1 p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 $A(-1, 2, 0)$, $B(2, -2, 1)$, $P(p, -1, 2)$ があり, 3 点 O, A, B が定める平面を α とする。また, 点 P から平面 α に垂線を下ろし, α との交点を Q とする。
- (1) 点 Q の座標を p を用いて表せ。
 - (2) 点 Q が $\triangle OAB$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。

- 2 n を自然数とし, $a_n = n(n+1)$ とする。さらに, a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする。
- (1) d_n は偶数であることを示せ。
 - (2) d_n は 8 で割り切れないことを示せ。
 - (3) p を 5 以上の素数とすると, d_n は p で割り切れないことを示せ。
 - (4) $d_n \leq 12$ を示せ。また, $d_n = 12$ となるような n を 1 つ求めよ。

- 3 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。 $0, \frac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える。

- (1) $f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ。
- (2) $f(x)$ の極大値を与える x の値を α , 極小値を与える x の値を β とし, 座標平面上に 2 点 $P(\alpha, f(\alpha))$, $Q(\beta, f(\beta))$ をとる。 t が $0 < t < 1$ を満たしながら変化するとき, 線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

- 4 n を 3 以上の自然数とする。2つの箱 X と Y があり、どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている。

A と B の 2 人のうち、A は箱 X から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を得点とする。B は箱 Y から札を 1 枚取り出し、もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし、もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば、その札を箱 Y に戻し、再び箱 Y から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を B の得点とする。

- (1) m を n 以下の自然数とする。B の得点が m になる確率を求めよ。
 (2) A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ。

- 5 $f(x)$ を区間 $[0, \pi]$ で連続な関数とする。関数 $f_1(x), f_2(x), \dots$ を関係式

$$f_1(x) = f(x),$$

$$f_{n+1}(x) = 2 \cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin(x-t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。さらに、自然数 n に対して

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin t dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt$$

とおく。

- (1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。
 (2) $c_n = a_n - 1$ とおく。このとき、 $c_{n+2} = -c_n$ が成立することを示し、一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ。
 (3) a_n, b_n が n によらない定数となるような $f(x)$ を 1 つ求めよ。