

北海道大学 一般 前期

H—23 ㊤

数 学

(数Ⅰ, 数Ⅱ, 数Ⅲ, 数A, 数B, 数C)

9 : 00~11 : 00

注 意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはならない。
2. 問題紙は3ページある。
3. 解答用紙は

解答用紙番号
数学0—1

(問①用),

解答用紙番号
数学0—2

(問②用),

解答用紙番号
数学0—3

(問③用),

解答用紙番号
数学0—4

(問④用),

解答用紙番号
数学0—5

(問⑤用)の5枚である。
4. 解答用紙は5枚とも全部必ず提出せよ。
5. 受験番号および座席番号(上下2箇所)は、監督員の指示に従って、すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。
6. 各問に対する解答は、それぞれ3で指定された解答用紙に記入せよ。
ただし、裏面を使用してはならない。
7. 必要以外のことを解答用紙に書いてはならない。
8. 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。
9. 問題紙・下書き用紙は回収しない。

解 答 上 の 注 意

採点時には、結果を導く過程を重視するので、必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

(数Ⅰ, 数Ⅱ, 数Ⅲ, 数A, 数B, 数C)

1 実数 x に対して $k \leq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す。

たとえば, $[2] = 2$, $[\frac{5}{2}] = 2$, $[-2.1] = -3$ である。

- (1) $n^2 - n - \frac{5}{4} < 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。
- (2) $[x]^2 - [x] - \frac{5}{4} < 0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。
- (3) x は (2) で求めた範囲にあるものとする。 $x^2 - [x] - \frac{5}{4} = 0$ を満たす x をすべて求めよ。

2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, 以下の 3 つの条件を考える。

- (i) $a + d = ad - bc = 0$
- (ii) $A^2 = O$
- (iii) ある自然数 n に対して $A^n = O$

このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) (i) ならば (ii) であることを示せ。
- (2) (iii) ならば $ad - bc = 0$ であることを示せ。
- (3) (iii) ならば (i) であることを示せ。

3 次の問いに答えよ。

- (1) xy 平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(1, 2)$ を通る円の方程式を求めよ。
- (2) t が実数全体を動くとき, xyz 空間内の点 $(t+2, t+2, t)$ がつくる直線を ℓ とする。3 点 $O(0, 0, 0)$, $A'(2, 1, 0)$, $B'(1, 2, 0)$ を通り, 中心を $C(a, b, c)$ とする球面 S が直線 ℓ と共有点をもつとき, a, b, c の満たす条件を求めよ。

4 n を 2 以上の自然数, q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉, 1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を, 1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに, 小さい番号から順に白玉は q 個ずつ, 赤玉は r 個ずつ配分しておく。たとえば, 1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し, 次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし, n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

- (1) a_2, a_3 を求めよ。
- (2) s_n を求めよ。
- (3) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。
- (4) a_n を求めよ。

5 $0 < a < 2\pi$ とする。 $0 < x < 2\pi$ に対して

$$F(x) = \int_x^{x+a} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta$$

と定める。

- (1) $F'(x)$ を求めよ。
- (2) $F'(x) \leq 0$ となる x の範囲を求めよ。
- (3) $F(x)$ の極大値および極小値を求めよ。