

数 学

(理系学部)

9 : 00～11 : 00

注 意

- 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはならない。
- 問題紙は3 ページある。
- 解答用紙は

解答用紙番号
数学 2—1

 (問 $\boxed{1}$ 用),

解答用紙番号
数学 2—2

 (問 $\boxed{2}$ 用),

解答用紙番号
数学 2—3

 (問 $\boxed{3}$ 用),

解答用紙番号
数学 2—4

 (問 $\boxed{4}$ 用),

解答用紙番号
数学 2—5

 (問 $\boxed{5}$ 用)の5 枚である。
- 解答用紙は5 枚とも全部必ず提出せよ。
- 受験番号および座席番号(上下2 箇所)は、監督員の指示に従って、すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。
- 各問に対する解答は、それぞれ3 で指定された解答用紙に記入せよ。
ただし、裏面を使用してはならない。
- 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。
- 問題紙・下書き用紙は回収しない。

解 答 上 の 注 意

採点時には、結果を導く過程を重視するので、必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

(理 系 学 部)

- 1 α, β を $0 < \alpha < \beta < 2$ を満たす実数とし、 $0 \leq x \leq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x) = |(x - \alpha)(x - \beta)|$$

とする。

- (1) $f(x)$ の最大値を M とする。 $f(x) = M$ となる x がちょうど 3 つあるとき、実数 α, β と M の値を求めよ。
- (2) (1) で求めた α, β について、 $f(x) - mx = 0$ が異なる 3 つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ。

- 2 n を自然数とし、2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して、 A の n 乗を

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \text{ と表す。}$$

- (1) $a_n = d_n$ と $b_n = c_n$ を示せ。
- (2) n が奇数ならば a_n は偶数であること、および、 n が偶数ならば a_n は奇数であることを示せ。

- 3 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 + 1}$$

とする。

- (1) $0 < x < 1$ ならば、 $0 < f(x) < 1$ となることを示せ。
- (2) $f(x) - x = 0$ となる x をすべて求めよ。
- (3) $0 < \alpha < 1$ とし、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \alpha, a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする。 α の値に応じて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

4 xyz 空間の原点 O と、 O を中心とし半径 1 の球面上の異なる 4 点 A, B, C, D を考える。点 $A(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2}, 0)$, $B(\cos(-\frac{\alpha}{2}), \sin(-\frac{\alpha}{2}), 0)$, $(0 < \alpha < \pi)$ とする。点 C, D は $\angle COA = \angle COB = \angle DOA = \angle DOB$ を満たし、点 C の z 座標は正、点 D の z 座標は負とする。

- (1) 点 C の座標を α と $\theta = \angle COA$ ($0 < \theta < \pi$) で表せ。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ の相異なる 2 つのベクトルのなす角がすべて等しいとき、点 C の座標を求めよ。

5 関数 $f(x)$ と $g(x)$ を $0 \leq x \leq 1$ の範囲で定義された連続関数とする。

$$(1) f(x) = \int_0^1 e^{x+t} f(t) dt$$

を満たす $f(x)$ は定数関数 $f(x) = 0$ のみであることを示せ。

$$(2) g(x) = \int_0^1 e^{x+t} g(t) dt + x$$

を満たす $g(x)$ を求めよ。