

# 数 学

(理系学部)

12 : 30 ~ 14 : 30

## 注 意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはならない。

2. 問題紙は 3 ページある。

3. 解答用紙は

解答用紙番号
数学 2—1

(問①用),

解答用紙番号
数学 2—2

(問②用),

解答用紙番号
数学 2—3

(問③用),

解答用紙番号
数学 2—4

(問④用),

解答用紙番号
数学 2—5

(問⑤用)の 5 枚である。

4. 解答用紙は 5 枚とも全部必ず提出せよ。

5. 受験番号および座席番号(上下 2 箇所)は、監督員の指示に従って、すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。

6. 各問に対する解答は、それぞれ 3 で指定された解答用紙に記入せよ。ただし、裏面を使用してはならない。

7. 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。

8. 問題紙・下書き用紙は回収しない。

## 解 答 上 の 注 意

採点時には、結果を導く過程を重視するので、必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

(理 系 学 部)

1 方程式  $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$  で定義される円  $C$  を考える。

- (1) 点  $A(-\sqrt{2}, 0)$  と点  $O(0, 0)$  を通り、円  $C$  に接する円の中心の座標を求めよ。
- (2) 点  $P$  が円  $C$  上を動くとき、 $\cos \angle APO$  の最大値と最小値を求めよ。

2 4枚のカードがあって、1から4までの整数がひとつずつ書かれている。このカードをよく混ぜて、1枚引いては数字を記録し、カードを元に戻す。この試行を  $n$  回繰り返して、記録した順に数字を並べて得られる数列を、 $a_1, a_2, \dots, a_n$  とする。

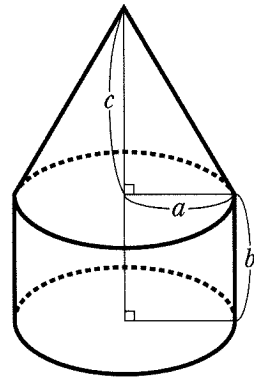
- (1) 条件  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = j$  を満たす数列が  $A_n(j)$  通りあるとする。ただし、 $j = 1, 2, 3, 4$  とする。
  - (i)  $A_n(1), A_n(2)$  を求めよ。
  - (ii)  $n \geq 2$  のとき、 $A_n(j)$  ( $j = 3, 4$ ) を  $A_{n-1}(1), A_{n-1}(2), \dots, A_{n-1}(j)$  で表し、 $A_n(3), A_n(4)$  を求めよ。
- (2)  $n \geq 2$  のとき、 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}$  かつ  $a_{n-1} > a_n$  となる確率を求めよ。

3  $xy$  平面上の曲線  $y = xe^x$  と  $x$  軸および2直線  $x = n, x = n + 1$  で囲まれる図形を  $D_n$  とする。ただし、 $n$  を自然数とする。

- (1) 図形  $D_n$  の面積を  $S_n$  として、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{ne^n}$  を求めよ。
- (2) 図形  $D_n$  を  $x$  軸のまわりに1回転してできる立体の体積を  $V_n$  として、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{(S_n)^2}$  を求めよ。

4

図のような、半径  $a$  の円を底面とする高さ  $b$  の円柱の上<sup>すい</sup>に、同じ大きさの円を底面とする高さ  $c$  の直円錐の屋根をのせてできる建物を考える。



- (1)  $V$  をこの建物の体積、 $S$  をこの建物の外側の表面積 (底面は除く) とする。 $V$  と  $S$  を  $a, b, c$  で表せ。
- (2)  $V$  を一定に保ちながら  $a, b, c$  を動かして、 $S$  を最小にしたい。
- (i)  $b = xa, c = ya$  とおき、 $V$  と  $a$  を一定としたとき、 $S$  の最小値  $T$  を  $V$  と  $a$  で表せ。
- (ii)  $T$  が最小となるときの比  $a : b : c$  を求めよ。

5

楕円  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  と双曲線  $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  を考える。 $C_1$  と  $C_2$  の焦点が一致しているならば、 $C_1$  と  $C_2$  の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。