1 $f(x)$を微分可能な関数とする。

(1) nを自然数とするとき，等式

$$\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt = x^n \quad (x \neq 1)$$

を満たす関数$f(x)$を求めよ。

(2) 任意の実数x，aに対して，等式

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(f(x)+f(a)\right) \quad (x \neq a)$$

を満たし，かつ条件$f(0)=1$および$f'(0)=2$を満たす関数$f(x)$を求めよ。

2

(1)　１０００から９９９９までの４桁の自然数のうち，１０００や１２１２のようにちょうど２種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

(2)　n 桁の自然数のうち，ちょうど２種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

3 xy 平面上の異なる２点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ $(x_2 \neq 0)$ に対して点 $C(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，点 $D(x_2,\ 0)$ をとり，直線 AC と y 軸の交点を E とする。ただし，原点 O は直線 AB 上にはないとする。

(1) 直角三角形 ODE の面積を S とするとき，S を x_1，y_1，x_2，y_2 で表せ。

(2) A，B が楕円 L：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上を動くとき，S の最大値を a，b で表せ。

(3) A，B が L 上にあって(2)で求めた S の最大値を与えるとき，点 C は楕円 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}\,a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}\,b}\right)^2=1$ 上にあることを示せ。

4 nを3以上の自然数とするとき，次を示せ。

ただし，$\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$とし，$i$を虚数単位とする。

(1) $\alpha^k + \overline{\alpha}^k = 2\cos\dfrac{2\pi k}{n}$

ただし，kは自然数とし，$\overline{\alpha}$はαに共役な複素数とする。

(2) $n = (1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$

(3) $\dfrac{n}{2^{n-1}} = \sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{n-1}{n}\pi$

5 2点$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 2,\ 0)$を通る直線をℓとし，中心が$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 2)$で半径が1の球面をCとする。点Pがℓ上にあり点QがC上にあるとし，線分PQは直線ℓと線分RQに垂直であるとする。

(1) 点Pの存在する範囲を求めよ。

(2) 線分PQの長さを最小にする点Pの座標を求めよ。