（理　系　学　部）

1　$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とおく。ただし，i は虚数単位である。

(1)　実数 a, b, c, d に対して $a + b\omega = c + d\omega$ が成り立つとき，$a = c$ かつ $b = d$ であることを示せ。

(2)　実数 x, y に対して，実数 s, t を $s + t\omega = \omega(x + y\omega)$ によって定めるとき，

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる2次の正方行列 A を求めよ。

(3)　$n = 1, 2, 3, \cdots$ のとき，上の A に対して $(A^2 + E)^{3n}$ を求めよ。ただし，E は単位行列である。

$\boxed{2}$ 不等式　$\cos 2x + cx^2 \geqq 1$　がすべての実数 x について成り立つような定数 c の値の範囲を求めよ。

3 xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ，この円の外部の点 $\mathrm{P}(a, b)$ から2本の接線を引き，その接点をA，Bとし，線分ABの中点をQとする。

(1) 点Qの座標を a，b を用いて表せ。

(2) 点Pが円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき，点Qの軌跡を求めよ。

4 $-1 < a < 1$ とする。

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-x^2}\,dx$ を求めよ。

(2) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，つぎの等式を示せ。

$$\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a} - \sum_{k=0}^{n}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

(3) つぎの等式を示せ。

$$\log\frac{1+a}{1-a} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

5 A，B，C の3人がつぎのように勝負をくり返す。1回目にはAとBの間で硬貨投げにより勝敗を決める。2回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの1人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負をくり返し，誰かが2連勝するか，または，100回目の勝負を終えたとき，終了する。ただし，硬貨投げで勝つ確率は各々 $\dfrac{1}{2}$ である。

(1) 4回以内の勝負でAが2連勝する確率を求めよ。

(2) $n = 2,\ 3,\ \cdots,\ 100$ とする。n 回以内の勝負で，A，B，C のうち誰かが2連勝する確率を求めよ。