1 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, \quad \frac{a_n - 2a_{n+1}}{n} = 2a_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

で定義されているとき，次の問に答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ のみたす漸化式を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2 原点Oを出発してx軸上を動く点Pがある。Pは1つのさいころを投げるごとに右（正方向）か左（負方向）へ1進む。

出発点OをP_0とし，さいころをk回投げるときに点Pが動いた点を順にP_1, P_2，……，P_kとする。このとき，P_0, P_1，……，P_{k-1}を点Pが通った点とよぶことにする。

点Pが座標aの点にいるとき，Pは次の規則に従って動くものとする。

（ア）点Pが座標$a+1$と$a-1$の2点とも通ったことがあるか，または一度も通ったことがなければ，1，2，3の目で左へ1動き，4，5，6の目で右へ1動く。

（イ）点Pが座標$a-1$の点のみ通ったことがあり$a+1$の点は通ったことがないときには，1，2，3，4の目で左へ1動き，5，6の目で右へ1動く。

（ウ）点Pが座標$a+1$の点のみ通ったことがあり$a-1$の点は通ったことがないときには，1，2の目で左へ1動き，3，4，5，6の目で右へ1動く。

たとえば，1回目にさいころを投げたときには，点Pは座標が1と-1のどちらの点も通ったことがないので，（ア）の規則から左右どちらかに同じ確率で1動く。その結果右に動いたとすれば，次にさいころを投げるときには（イ）の規則によって1，2，3，4の目で左へ1動き，5，6の目で右へ1動く。

このとき，次の問に答えよ。

(1) さいころを2回投げたあとで，点Pが原点Oにいる確率を求めよ。

(2) さいころを6回投げたあとで，点Pが原点Oにいる確率を求めよ。

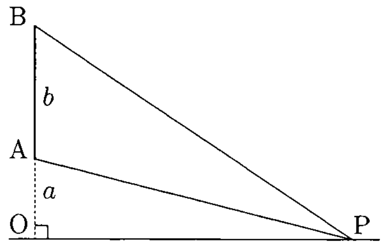
3 n を自然数とするとき次の等式を証明せよ。ただし $\sin\dfrac{\beta}{2} \fallingdotseq 0$ とする。

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\alpha + k\beta) = \frac{\sin\dfrac{n\beta}{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{n-1}{2}\beta\right)}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(\alpha + k\beta) = \frac{\sin\dfrac{n\beta}{2}\cos\left(\alpha + \dfrac{n-1}{2}\beta\right)}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$$

4

図のように地面上の点 O の真上に長さ b の棒 AB が地面に垂直になるようにつるしてあり，その下端 A は地面から高さ a のところにある。ただし $a>0$ とする。この棒を地面上を動く点 P から観測する。このとき $\angle$BPA が最大になる点 P に対し OP の長さを求めよ。なお地面は水平面とみなす。



5 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義は以下の式で与えられる。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

たとえば，関数 $3x^2$ の導関数 $(3x^2)'$ を求めると以下のようになる。

$$(3x^2)' = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \to 0}(6x + 3h) = 6x$$

導関数の定義式を用いて，対数関数 $\log_a x$ の導関数は

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

で与えられることを示せ。ただし，$a > 0$ かつ $a \neqq 1$ とし，$x > 0$ とする。ここで，$\log a$ は a の自然対数であり，その底は $e = \lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ で与えられる。

6 正の数 a, b, c は $a < b < c$ の関係にあり，$3a + c \fallingdotseq 4b$ とする。$f(x) = -\log x$ とおくとき，座標平面上に 4 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(a))$，$\mathrm{C}(c,\ f(a))$，$\mathrm{D}(c,\ f(c))$ を定める。線分 AC を $1:3$ に内分する点を M とする。B を通る y 軸に平行な直線が曲線 $y = f(x)$ と交わる点を E とし，M を通る y 軸に平行な直線が線分 AD に交わる点を F とする。

次に，線分 BM を $2:1$ に内分する点を N とし，N を通る y 軸に平行な直線が線分 EF および曲線 $y = f(x)$ と交わる点をそれぞれ P および Q とする。

このとき，次の問に答えよ。

(1) 点 P と点 Q の座標を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ は下に凸であることを示せ。

(3) (1)，(2) を用いて

$$a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{6}} < \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{6}$$

を示せ。

7 定積分

$$\int_0^{\pi} \left|1 - \sqrt{2} - 2\sin^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\right| \, d\theta$$

の値を求めよ。