

前期日程試験

令和 7 年度医学科入学試験問題

数 学

〔注意事項〕

- 1 監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない。
- 2 解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。
- 3 この問題冊子の本文は，4 ページからなっている。落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば，手をあげて監督者に知らせること。
- 4 この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい。
- 5 解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。
- 6 この問題冊子は持ち帰ること。

1 以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 m に対して, $2m^2 + 19$ は 5 の倍数でないことを証明せよ。

(2) 自然数 m, n, k は等式

$$(E) \quad 14m^2n + 10m^2 + 133n = 70k + 45$$

を満たすとする。このとき, $(2m^2 + 19)(7n + 5)$ は 70 の倍数であることを証明せよ。

(3) $k \leq 50$ のとき, (2)の等式 (E) を満たす自然数の組 (m, n, k) をすべて求めよ。

2 空間内に同一平面上にない4点A, B, C, Dで $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{CB}| = 2$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$ および $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ を満たすものを考える。 $x = |\overrightarrow{CD}|$ とおく。

- (1) $|\overrightarrow{DA}|$ と $|\overrightarrow{DB}|$ を求めよ。
- (2) x のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) $\triangle ACD$ と $\triangle BCD$ の面積の和を S とする。 S を最大にする x の値を求めよ。
- (4) x は(3)で求めた値とし、線分ABは3点B, C, Dを通る平面に垂直であるとする。このとき四面体ABCDの体積を求めよ。

3 自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ ($x > 0$) を次のように定める。

$$f_1(x) = \log(1+x), \quad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $x > 0$ のとき、不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < f_1(x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 自然数 n に対して

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 f_n \left(\frac{1}{x} \right) - x \right) = -\frac{n}{2}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

4 $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ とし、 xy 平面上の曲線 $C: y = f(x) (x > 0)$ および C 上の点 $P(t, f(t))$ における C の接線 l を考える。

- (1) $x > 0$ において関数 $f(x)$ の極値とグラフの変曲点の座標を求めよ。
- (2) l と C の P 以外の共有点が存在するための t の条件を求め、その共有点の座標を t を用いて表せ。
- (3) l と C で囲まれる部分の面積を $S(t)$ とおく。ただし、 P 以外に l と C の共有点が存在しないときは $S(t) = 0$ とする。このとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t) - \log t)$$

を求めよ。

(計 算 用 紙)

