京都大学

平成29年度入学試験問題

数　学（理系）

200点満点

≪配点は，一般入試学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに16ページある．
3. 問題は全部で6題ある（1ページから2ページ）．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと．ただし，続き方をはっきり示して計算用ページに解答の続きを書いても良い．この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．それ以外の場合，計算用ページは採点の対象としない．
6. 解答のための下書き，計算などは，計算用ページに書くこと．
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．
8. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

$\boxed{1}$ (30 点)

w を 0 でない複素数，x, y を $w + \dfrac{1}{w} = x + yi$ を満たす実数とする．

(1) 実数 R は $R > 1$ を満たす定数とする．w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ．

(2) 実数 α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ．

$\boxed{2}$ (30 点)

四面体 OABC を考える．点 D, E, F, G, H, I は，それぞれ辺 OA, AB, BC, CO, OB, AC 上にあり，頂点ではないとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行ならば AE : EB = CF : FB であることを示せ．

(2) D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は OABC の各辺の中点であり，OABC は正四面体であることを示せ．

$\boxed{3}$ (35 点)

p, q を自然数，α, β を

$$\tan\alpha = \frac{1}{p}, \qquad \tan\beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき

$$\tan(\alpha + 2\beta) = 2$$

を満たす p, q の組 (p, q) をすべて求めよ．

4 (35 点)

△ABC は鋭角三角形であり，$\angle A = \dfrac{\pi}{3}$ であるとする．また △ABC の外接円の半径は 1 であるとする．

(1) △ABC の内心を P とするとき，∠BPC を求めよ．

(2) △ABC の内接円の半径 r の取りうる値の範囲を求めよ．

5 (35 点)

$a \geqq 0$ とする．$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y = xe^{-x}$，直線 $y = ax$，直線 $x = \sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．このとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

（ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする．）

6 (35 点)

n を自然数とする．n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている．各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る．このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ．

問題は，このページで終わりである．