

京都大学

平成 28 年度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに 16 ページある。
3. 問題は全部で 6 題ある(1 ページから 3 ページ)。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと。ただし、続き方をはっきり示して計算用ページに解答の続きを書いても良い。この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。それ以外の場合、計算用ページは採点の対象としない。
6. 解答のための下書き、計算などは、計算用ページに書くこと。
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。
8. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

(1) n を 2 以上の自然数とすると、関数

$$f_n(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin^{n-1} \theta$$

の $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n)^n$ を求めよ.

2

(30 点)

素数 p, q を用いて

$$p^q + q^p$$

と表される素数をすべて求めよ.

3

(35 点)

四面体 $OABC$ が次の条件を満たすならば、それは正四面体であることを示せ.

条件：頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は

対面の外心を通る.

ただし、四面体のある頂点の対面とは、その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう.

4

(35 点)

xyz 空間において, 平面 $y = z$ の中で

$$|x| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1, \quad 0 \leq y \leq \log a$$

で与えられる図形 D を考える. ただし a は 1 より大きい定数とする.

この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

5

(35 点)

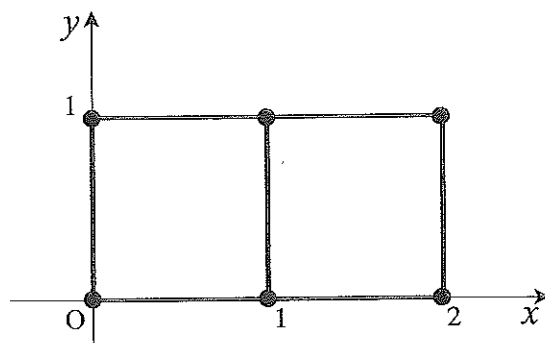
xy 平面上の 6 個の点 $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)$ が図のように長さ 1 の線分で結ばれている. 動点 X は, これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する.

規則: 動点 X は, そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって

結ばれる図の点のいずれかに, 等しい確率で移動する.

例えば, X が $(2, 0)$ にいるときは, $(1, 0), (2, 1)$ のいずれかに $\frac{1}{2}$ の確率で移動する. また X が $(1, 1)$ にいるときは, $(0, 1), (1, 0), (2, 1)$ のいずれかに $\frac{1}{3}$ の確率で移動する.

時刻 0 で動点 X が $O = (0, 0)$ から出発するとき, n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ. ただし n は 0 以上の整数とする.



6

(35 点)

複素数を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対し, 次の条件を考える.

(イ) $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる.

(ロ) $f(x)$ の係数 a, b の少なくとも一方は虚数である.

この 2 つの条件 (イ), (ロ) を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ.

問題は, このページで終わりである.