

京都大学

平成 26 年度 入学 試験 問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに 16 ページある。
3. 問題は全部で 6 題ある (1 ページから 2 ページ)。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと。ただし、続き方をはっきり示して計算用ページに解答の続きを書いても良い。この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。それ以外の場合、計算用ページは採点の対象としない。
6. 解答のための下書き、計算などは、計算用ページに書くこと。
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。
8. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

座標空間における次の 3 つの直線 l, m, n を考える：

l は点 $A(1, 0, -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u} = (2, 1, -1)$ に平行な直線である．

m は点 $B(1, 2, -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v} = (1, -1, 1)$ に平行な直線である．

n は点 $C(1, -1, 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w} = (1, 2, 1)$ に平行な直線である．

P を l 上の点として， P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする．このとき， $PQ^2 + PR^2$ を最小にするような P と，そのときの $PQ^2 + PR^2$ を求めよ．

2

(30 点)

2 つの粒子が時刻 0 において $\triangle ABC$ の頂点 A に位置している．これらの粒子は独立に運動し，それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする．たとえば，ある時刻で点 C にいる粒子は，その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する．この 2 つの粒子が，時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ．

3

(35 点)

$\triangle ABC$ は，条件 $\angle B = 2\angle A$ ， $BC = 1$ を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする．このとき， $\cos \angle B$ を求めよ．

4

(35 点)

実数の定数 a, b に対して, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1}$$

で定める. すべての実数 x で不等式

$$f(x) \leq f(x)^3 - 2f(x)^2 + 2$$

が成り立つような点 (a, b) の範囲を図示せよ.

5

(35 点)

自然数 a, b はどちらも 3 で割り切れないが, $a^3 + b^3$ は 81 で割り切れる. どのような a, b の組 (a, b) のうち, $a^2 + b^2$ の値を最小にするものと, そのときの $a^2 + b^2$ の値を求めよ.

6

(35 点)

双曲線 $y = \frac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と, 原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を, それぞれ C_1, C_2 とする. C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A, B で交わり, 点 A における C_1 の接線 l と線分 OA のなす角は $\frac{\pi}{6}$ であるとする. このとき, C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ.

問題は, このページで終わりである.