京都大学

平成 25 年度入学試験問題

数　学（理系）

200 点満点

≪配点は，学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに 16 ページある．
3. 問題は全部で 6 題ある（1 ページから 2 ページ）．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと．ただし，続き方をはっきり示して計算用ページに解答の続きを書いても良い．この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．それ以外の場合，計算用ページは採点の対象としない．
6. 解答のための下書き，計算などは，計算用ページに書くこと．
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．
8. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

平成２５年度

補足説明（数学（理系））

5 番の問題文の最後に次の文章を追加する。

ただし、２つの曲線がある点で接するとは、その点を共有し、さらにその点において共通の接線をもつことである。

$\boxed{1}$

(30 点)

平行四辺形ABCDにおいて，辺ABを1：1に内分する点をE，辺BCを2：1に内分する点をF，辺CDを3：1に内分する点をGとする．線分CEと線分FGの交点をPとし，線分APを延長した直線と辺BCの交点をQとするとき，比AP：PQを求めよ．

$\boxed{2}$

(35 点)

Nを2以上の自然数とし，a_n($n = 1, 2, \ldots$)を次の性質(i)，(ii)をみたす数列とする．

(i)　$a_1 = 2^N - 3$，

(ii)　$n = 1, 2, \ldots$に対して，

$$a_n \text{が偶数のとき } a_{n+1} = \frac{a_n}{2},\quad a_n \text{が奇数のとき } a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2}.$$

このときどのような自然数Mに対しても

$$\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1} - N - 5$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{3}$

(35 点)

nを自然数とし，整式x^nを整式$x^2 - 2x - 1$で割った余りを$ax + b$とする．このときaとbは整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ．

$\boxed{4}$

(35 点)

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ．ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい．

$\boxed{5}$

(30 点)

xy 平面内で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1 : y = \sqrt{3}\log(1 + x),\quad C_2 : y = \sqrt{3}\log(1 - x)$$

とそれぞれ点 A，点 B で接しているとする．さらに△PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする．このとき 3 つの曲線 C，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{6}$

(35 点)

投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する．

(1) 石が座標 x の点にあるとする．2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．

(2) 石が原点にあるとする．n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n - 2$ の点にある確率を求めよ．

問題は，このページで終わりである．