

京都大学

平成 24 年度 入 学 試 験 問 題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに 16 ページある。
3. 問題は全部で 6 題ある (1 ページから 2 ページ)。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと。ただし、続き方をはっきり示して計算用ページに解答の続きを書いても良い。この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。それ以外の場合、計算用ページは採点の対象としない。
6. 解答のための下書き、計算などは、計算用ページに書くこと。
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。
8. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(35 点)

次の各問に答えよ.

- (1) a が正の実数のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.
- (2) 定積分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1 + x^2} dx$ の値を求めよ.

2

(30 点)

正四面体 $OABC$ において, 点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる. ただし P, Q, R は四面体 $OABC$ の頂点とは異なるとする. $\triangle PQR$ が正三角形ならば, 3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ.

3

(30 点)

実数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

4

(35 点)

- (1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ.
- (2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で, $P(\sqrt[3]{2}) = 0$ を満たしているとする. このとき $P(x)$ は $x^3 - 2$ で割り切れることを証明せよ.

5

(35 点)

次の命題 (b), (q) のそれぞれについて, 正しいかどうか答えよ. 正しいければ証明し, 正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ.

- (b) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが 60° である三角形を作ることができるならば, n は 3 の倍数である.
- (q) $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ において, $AC < AD$ かつ $BC < BD$ ならば, $\angle C > \angle D$ である.

6

(35 点)

さいころを n 回投げて出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする. さらに

$$Y_1 = X_1, \quad Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \quad (k = 2, \dots, n)$$

によって $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ を定める.

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \leq Y_n \leq 1 + \sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ.

問題は, このページで終わりである.