順天堂大学

30 M

数　　学

[注意事項]

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 問 Ⅰ，Ⅱ の解答はマークシートにマークし，問 Ⅲ の解答は専用の解答用紙に書くこと。
3. マークシート解答用紙は，コンピュータで処理するので，折り曲げたり汚したりしないこと。
4. マークシートに，氏名・受験番号を記入し，受験番号をマークする。マークがない場合や誤って記入した場合の答案は無効となる。また，問 Ⅲ の解答用紙にも受験番号・氏名を記入する。無記入の場合や受験番号を誤記入した場合はその答案は無効になる。

受験番号のマーク例(13015の場合)

受	験	番	号	
1	3	0	1	5
万位	千位	百位	十位	一位
	⓪	●	⓪	⓪
●	①	①	●	①
②	②	②	②	②
③	●	③	③	③
④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	●
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

5. 問 Ⅰ，Ⅱ において，マークするときは，HB または B の黒鉛筆を用いること。誤ってマークした場合には，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえで，新たにマークし直すこと。
6. マークで解答する場合は，下記の例に従い，正しくマークすること。

正しいマーク例

① ② ● ④ ⑤ ⑥

誤ったマーク例

① ② ③ ④ ⑤ ⑥	マークが薄い
① ② ③ ④ ⑤ ⑥	マークが不完全
① ② ③ ④ ⑤ ⑥	マークが○印
① ② ③ ④ ⑤ ⑥	マークがV印

7. マークで解答する場合，$\square$ の中の文字は，それぞれ符号(－)または，数字1文字が対応している。例えば，$\boxed{アイ}$ の形の場合，－9から－1の整数または10から99の整数が入り得る。

－2の場合

ア	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	●	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

32の場合

ア	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	●	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

I $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

(1) 円 $x^2 + y^2 - 4ax - 2ay + 4a^2 = 0\ (a > 0)$ の中心は直線 $y = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}x$ の上にある。この円と直線 $y = mx$ が接するのは $m = \boxed{ウ}$，または $m = \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ のときであり，これらの直線と円の接点をそれぞれA，Bとすると直線ABの傾きは $\boxed{カキ}$ である。また，線分ABの長さが3になるのは $a = \dfrac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$ のときである。

(2)(a) 13 を 11 で割ったときの余りは 2 であり，13^2 を 11 で割ったときの余りは 4 である。また，1020 を 11 で割ったときの余りは 8 であり，1020^3 を 11 で割ったときの余りは $\boxed{\text{ア}}$ である。

(b) 最大公約数が 1020^3，最小公倍数が 1020^{10} であり，$a^2 + b^2$ を 11 で割ったときの余りが 10 であるような自然数 a，b がある。積 ab を 11 で割ったときの余りは $\boxed{\text{イ}}$ となる。$(a+b)^2$ を 11 で割ったときの余りは $\boxed{\text{ウ}}$ となり，$(a-b)^2$ を 11 で割ったときの余りは $\boxed{\text{エ}}$ となる。a，b をそれぞれ 11 で割ったときの余りを小さいほうから順に並べると $\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ となる。

(3) 原点を中心とする半径1の円Oがある。伸び縮みしない長さ 2π の糸が一端を点A(1, 0)に固定され，点Aから時計回りに円Oに巻き付けられている。はじめ，糸のもう一方の端点Pは点Aにある。糸を張ったままほどくと，糸の一部は円Oの円周上にあり，糸の残りの部分は直線状になる。下図のように少しほどいたときの円周上の部分と直線状の部分の境の点を $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とする。

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x(\theta),\ y(\theta)) = (\cos\theta,\ \sin\theta) + \theta(\cos(\theta + a\pi),\ \sin(\theta + a\pi))$$

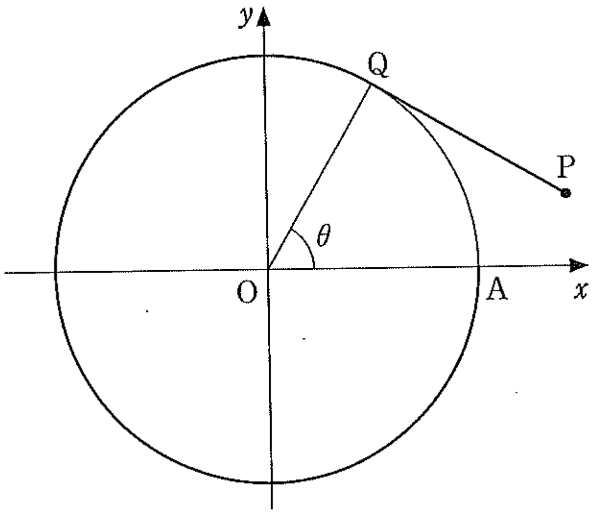
と表すことができ，$-1 < a \leqq 1$ とすると $a = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

θ が α となるまでほどいたとき，点Pのえがく曲線の長さは

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\, d\theta = b\alpha^c$$ となる。

ここで $b = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$c = \boxed{\text{カ}}$ である。

したがって，糸がちょうどほどき終わるまでに点Pのえがく曲線の長さを $d\pi^f$ とすると，$d = \boxed{\text{キ}}$，$f = \boxed{\text{カ}}$ である。



Ⅱ $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

A，Bの2チームに持ち点が与えられ，ゲームを行う。勝ったチームが持ち点1を得て負けたチームが持ち点1を失うものとする。ゲームを繰り返して一方のチームの持ち点が0になったときに終了し，もう一方のチームの優勝とする。ただし，各ゲームで引き分けはないものとする。

(1) 各ゲームでAが勝つ確率を $\frac{1}{3}$ とし，はじめの持ち点をA，Bともに2とすると，2ゲーム終了時にAが優勝する確率は $\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，4ゲーム終了時にAが優勝する確率は $\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ である。また，Aが優勝する確率は $\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である。

(2) 各ゲームでAが勝つ確率を $\frac{1}{3}$ とし，はじめの持ち点をAが3，Bが1とするとAが優勝する確率は $\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}$，はじめの持ち点をAが1，Bが3とするとAが優勝する確率は $\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}$ である。

(3) 各ゲームでAが勝つ確率を $\frac{1}{3}$ とし，はじめの持ち点をA，Bともに3とすると，3ゲーム終了時にAの持ち点が4になる確率は $\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$，3ゲーム終了時にAの持ち点が2になる確率は $\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ である。また，Aが優勝する確率は $\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$ である。

(4) 各ゲームでAが勝つ確率を $\frac{1}{2}$ とし，はじめの持ち点をAが3，Bが2とする。このときにAが優勝する確率 p を求めたい。1ゲーム目にAが勝ち，かつAが優勝する確率を p を用いて表わすと $\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}p+\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ となる。この確率と1ゲーム目にBが勝ち，かつAが優勝する確率とを合わせて $p=\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$ を得る。

Ⅲ

(1) 三角形ABCに対して$\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$とおく。この三角形の重心Gは3つの中線の交点として与えられる。このことから$\overrightarrow{AG}$を$\vec{b}$と$\vec{c}$で表す式を導け。

(2) 辺ABの中点をDとしたとき，内積$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DG}$を$|\vec{b}|$，$|\vec{c}|$および$\vec{b}$と$\vec{c}$のなす角$\theta$で表せ。

(3) 三角形ABCにおいて，重心と外心が一致する必要十分条件を与えよ。