令　和　2　年　度

(ページ数)
3ページ

試験問題(記述式)―数　　学

(注意)　解答はすべて別紙解答用紙の定められた欄に書くこと。

1　以下の問に答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　自然数 n に対し，$\sqrt{n^2+10n}$ の整数部分を $a(n)$ とする。すべての自然数 n に対して，$a(n)-n$ が取り得る値の集合を A とする。A の要素のうち，2番目に大きい値を b とすると，n は $\alpha \leqq n \leqq \beta$ の範囲でのみ $a(n)-n=b$ を満たす。このような自然数 α，β はいくらか。

(2)　$a_1=1$，$a_2=e$，$a_{n+2}^3=a_{n+1}^2 a_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　O を中心とする円に AB = 3，AC = 2，∠BAC = 120° の△ABC が内接しているとする。また，直線 BO と直線 AC の交点を D とする。このとき，AD はいくらか。

(4)　座標平面上に曲線 $C: y=\dfrac{5}{1+5e^{-1-x}}$ がある。C の変曲点の y 座標を k とする。曲線 C，y 軸，直線 $y=k-\dfrac{1}{2}$，直線 $y=k+\dfrac{1}{2}$ で囲まれる部分の面積はいくらか。

2 3次関数 $f(x)=x^3-ax$（aは定数）について，以下の問に答えよ。

(1) 座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ が点 $(3,\ a)$ を通る接線をちょうど2本もつような a を求めよ。

(2) 曲線 C 上の異なる2点S，Tそれぞれにおける C の接線がどちらも直線STに直交するとする。このようなS，Tが存在する a の範囲を求めよ。

(3) 曲線 C と曲線 $y=(x-2)^3-ax+2a$ の両方に接する直線がちょうど4本あるとき，それらの直線をすべて求めよ。

3 複素数 u，$v_m(m=1,\ 2,\ 3,\ 4)$，$w_n(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ と関数 $f(z)=\dfrac{2z+4}{z+1}$，$g(z)=\dfrac{z-3}{-z+2}$，$h(z)=\dfrac{2z-8}{-z+2}$ がある。また，歪みがないコインを独立に 4 回投げ，w_n を以下のように定める。

$$w_n=\begin{cases} g(v_n) & (n\text{ 回目のコイン投げの結果が表}) \\ h(v_n) & (n\text{ 回目のコイン投げの結果が裏}) \end{cases} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

ただし，v_m は

$$v_m=\begin{cases} f(u) & (m=1) \\ f(w_{m-1}) & (m=2,\ 3,\ 4) \end{cases}$$

と定める。u が等式 $|u|=1$ を満たしながら複素数平面上を動くものとして，以下の問に答えよ。

(1) 複素数平面上で v_1 が描く図形を求めよ。

(2) 複素数平面上で $g\bigl(f(u)\bigr)$ は円を描くが，その中心の点と半径を求めよ。

(3) 複素数平面上で w_4 が描く円の中心の点の実部を x_4，半径を r_4 とする。$r_4=\dfrac{1}{4}$ であったときの，$x_4\leqq -1$ となる条件付き確率はいくらか。