（平成30年度推薦）　　数　学

$\boxed{1}$　（問題文の枠内にあてはまる数値や式を，下欄に記入すること。）

(1)	ア	$\dfrac{11}{36}$	イ	$\dfrac{7}{18}$
(2)	ウ	$\dfrac{2}{27}$	エ	$\dfrac{5}{36}$

$\boxed{2}$　（答を下欄に記入すること。）

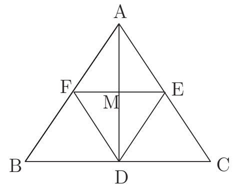
(1)　$(k+1)^5 - k^5 = \boxed{5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}$

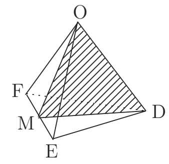
(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \boxed{\frac{1}{30}}\, n(n+1)\boxed{(\quad 2n+1 \quad)}\boxed{(\quad 3n^2+3n-1 \quad)}$

ただし，左の空欄には係数が，右の空欄２つには整数を係数とする n の１次式および２次式が入る。

(3)　$\dfrac{1^4+2^4+\cdots+18^4}{1^2+2^2+\cdots+18^2} = \boxed{205}$

$\boxed{3}$　（最後の答だけでなく，答の導き方も書くこと。）





(1)　三角形成立条件より，$4-4 < 4x < 4+4$ より，$0 < x < 2$ $\cdots$①

$\triangle$ABC において，AB $=$ AC であるので，AD$\perp$BC といえる。

$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BD}^2} = \sqrt{4^2 - (2x)^2} = 2\sqrt{4-x^2}$

線分 EF の中点を M とすると，$\mathrm{AM} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AD} = \sqrt{4-x^2}$

3 頂点 A，B，C が 1 点 O で重なるとき，右上図のように $\triangle$OMD ができる。

$\mathrm{OM} = \mathrm{MD} = \sqrt{4-x^2}$, $\mathrm{OD} = 2x$ より，$|\mathrm{OM} - \mathrm{MD}| < \mathrm{OD} < \mathrm{OM} + \mathrm{MD}$

$0 < 2x < 2\sqrt{4-x^2}$ から，$x < \sqrt{4-x^2}$ より，$x^2 < 4 - x^2$，$x^2 < 2$

① より，$\underline{0 < x < \sqrt{2}}$

(2)　$\triangle$OMD において，線分 OD の中点 N とすると，OD$\perp$MN である。

$\mathrm{MN} = \sqrt{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 - x^2} = \sqrt{4-2x^2}$

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{4-2x^2} = \underline{x\sqrt{4-2x^2}}$

(3)　OM$\perp$FE, DM$\perp$FE より，平面 ODM$\perp$FE

$V = \triangle\mathrm{ODM} \times \mathrm{EF} \times \dfrac{1}{3} = \underline{\dfrac{2}{3}x^2\sqrt{4-2x^2}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{2(2x^4 - x^6)}$

$t = x^2$ とおくと，t のとりうる値の範囲は，$0 < t < 2$

$f(t) = 2t^2 - t^3$ とおくと，$f'(t) = 4t - 3t^2 = t(4-3t)$

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

増減表より，$t = \dfrac{4}{3}$ のとき，最大値 $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = 2 \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 = \dfrac{32}{27}$

$x = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \underline{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$ のとき，V は最大値 $\dfrac{2}{3}\sqrt{2 \times \dfrac{32}{27}} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{8}{3\sqrt{3}} = \underline{\dfrac{16\sqrt{3}}{27}}$ をとる。