（一般後期）平成29年度入学試験　数　学

1

(1) x のとり得る値の範囲は $\boxed{x > 1}$

(2) $\cos A + \cos B + \cos C$ の最大値は $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

そのときの x の値は $\boxed{2}$

(3) $\dfrac{r}{R}$ の最大値は $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

そのときの x の値は $\boxed{2}$

2

(1) $a_2 = \boxed{2}$

(2) $a_3 = \boxed{3}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} a_k = \boxed{1998}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} ka_k = \boxed{1000665}$

(5) $a_2 \times a_3 \times a_4 \times \cdots \times a_{1000}$ の桁数は $\boxed{260}$

3　(最後の答だけでなく，答の導き方も書くこと。)

(1)　$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x$ とおくと，$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3a^2$ から，

$x = t$ における接線は，$y = f'(t)(x - t) + f(t)$ より，

$y = (3t^2 + 6at + 3a^2)x - 2t^3 - 3at^2$ $\cdots$①

$(a,\ b)$ を通るので，$b = (3t^2 + 6at + 3a^2)a - 2t^3 - 3at^2$

$2t^3 - 6a^2t - 3a^3 + b = 0$ より，$g(t) = 2t^3 - 6a^2t - 3a^3 + b$ とおくと，$g(t) = 0$ の実数解の個数が接点の個数である。グラフの概形より，1つの接点につき接線は1本決まるので，$g(t) = 0$ の実数解の個数を調べるとよい。

$g'(t) = 6(t + a)(t - a)$, $a > 0$ より，$t = \pm a$ で $g(t)$ は極値をもつ。

$g(-a)g(a) = (a^3 + b)(-7a^3 + b)$ から，

$g(-a)g(a) < 0$ のとき，つまり $-a^3 < b < 7a^3$ のとき，$g(t) = 0$ は異なる3つの実数解をもつ。

$g(-a)g(a) = 0$ のとき，つまり $b = -a^3,\ 7a^3$ のとき，$g(t) = 0$ は異なる2つの実数解をもつ。

$g(-a)g(a) > 0$ のとき，つまり $b < -a^3,\ b > 7a^3$ のとき，$g(t) = 0$ は実数解を1つもつ。

以上より，

$-a^3 < b < 7a^3$ のとき3本，$b = -a^3,\ 7a^3$ のとき2本，$b < -a^3,\ b > 7a^3$ のとき1本

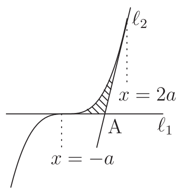
(2)　$a > 0,\ b < 0$ より，(1) から $b = -a^3$

$g(t) = 2t^3 - 6a^2t - 3a^3 - a^3 = 2(t + a)^2(t - 2a) = 0$ から，$t = -a,\ 2a$

① に $t = -a,\ 2a$ を代入すると，$y = -a^3,\ y = 27a^2x - 28a^3$

ゆえに，$\ell_1 : y = -a^3,\quad \ell_2 : y = 27a^2x - 28a^3$

(3)　右図の斜線部分の面積を S とする。



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-a}^{a} \{x^3 + 3ax^2 + 3a^2x - (-a^3)\}dx \\
&\quad + \int_{a}^{2a} \{x^3 + 3ax^2 + 3a^2x - (27a^2x - 28a^3)\}dx \\
&= \int_{-a}^{a} (x + a)^3 dx + \int_{a}^{2a} (x - 2a)^2(x + 7a)dx \\
&= \int_{-a}^{a} (x + a)^3 dx + \int_{a}^{2a} \{(x - 2a)^3 + 9a(x - 2a)^2\}dx \\
&= \left[\frac{1}{4}(x + a)^4\right]_{-a}^{a} + \left[\frac{1}{4}(x - 2a)^4 + 3a(x - 2a)^3\right]_{a}^{2a} \\
&= \frac{27}{4}a^4
\end{aligned}
$$