

産業医科大学 一般

平成24年度入学試験問題

数 学

注 意

1. 問題冊子は6ページ、解答紙は3枚である。問題冊子は、指示があるまで開かないこと。
2. 解答開始前に、試験監督者の指示にしたがって、すべての解答紙それぞれ2ヶ所に受験番号を記入すること。
3. 「始め」の合図があったら、問題冊子のページ数を確認すること。
4. 解答は、黒色鉛筆(シャープペンシルも可)を使用し、すべて所定の欄に記入すること。欄外および裏面には記入しないこと。
5. 試験終了後、監督者の指示に従って、解答紙の順番をそろえること。
6. 下書き等は、問題冊子の余白を利用すること。
7. 解答紙は持ち帰らないこと。

1 空欄にあてはまる適切な数、式、記号などを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(1) 実数 x に対して、 x 以下の最大の整数を $[x]$ で表す。例えば $[3] = 3$ 、 $[3.14] = 3$ 、 $[-3.14] = -4$ である。実数 x について、方程式 $4x - 3[x] = 0$ の解の個数は であり、方程式 $x^2 - 3x + [3x] = 0$ の解の個数は である。

(2) a, b, c を $a + b + c = \pi$ を満たす正の実数とすると、 $\sin(a)\sin(b)\sin(c)$ の最大値は である。

(3) 原点を O とする座標空間内の 3 点 $A(-1, 1, 1)$ 、 $B(1, -1, 1)$ 、 $C(1, 1, -1)$ について $\triangle ABC$ は正三角形である。 $\triangle ABC$ を 1 つの面にもつ正四面体の他の頂点 D の座標は または である。

(4) 定積分 $\int_3^4 \frac{6x+5}{x^3-3x-2} dx$ の値は である。

(5) 123 から 789 までの 3 桁の数から、1 つを無作為に選び出すとき、同じ数字が 2 つ以上含まれている確率は である。

(6) 数直線上の点 P は、原点 O を出発して、次のルールに従って移動するとする。
「1 つのさいころを振り、3 以下の目が出たときは右に 1、5 以上の目が出たときは左に 1、それぞれ動く。また、4 の目が出たときは動かない。点 P の座標が -1 になったら、さいころを振るのを止め点 P はそこにとどまる。それ以外のときは、さいころをまた振る。」
さいころを多くとも 3 回振り移動も終えた後の、点 P の座標の期待値は である。

(計算用余白)

2 座標平面上の原点を O とする。中心が O 、半径が 1 の円を C とする。円 C の外部の点を $P(x_0, y_0)$ とする。点 P を通り円 C に接する 2 直線を l_1, l_2 とする。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) 直線 l_1, l_2 と円 C の 2 つの接点を結ぶ線分の midpoint の座標を、点 P の座標 x_0 と y_0 で表しなさい。

(2) 直線 l_1, l_2 は y 軸に平行でないとする。直線 l_1, l_2 と y 軸の交点をそれぞれ Q, R とし、線分 QR の midpoint を M とする。ただし、点 Q と R が一致するときは、点 M は点 Q, R と一致する点とする。このとき、点 M の y 座標が 2 となる点 P の描く曲線と直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$ で囲まれる図形の面積を求めなさい。

(計算用余白)

3 自然数 n と 0 以上の整数 m に対して、 $p_n = {}_{2n}C_n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ 、 $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$ とおく。次の問いに答えなさい。

(1) すべての自然数 n について $\left(n + \frac{1}{2}\right) p_n^2 = \frac{b I_{2n}}{I_{2n+1}}$ が成り立つように、定数 b の値を求めなさい。

(2) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin^m x > \sin^{m+1} x > 0$ であることを用いて、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} p_n$ を求めなさい。

(計算用余白)