獨協医科大学 医学部

平成３１年度　入学者選抜試験問題

一般入学試験

数　学 (70分)

Ⅰ　注意事項

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　この問題冊子は16ページあります。ただし，出題ページは下記のとおりです。

　4，6，8，10，12ページ

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督員に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**

　受験番号を記入し，さらにその下の**マーク**欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄**

　氏名・フリガナを記入しなさい。

5　試験開始後30分間および試験終了前５分間は退出できません。

6　この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。**この問題冊子は試験終了後回収します。**

Ⅱ　解答上の注意

1　**「解答上の注意」が，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。**

受　験　番　号			

解答上の注意

解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がない限り，数字（0～9），符号（−，±），自然対数の底（e）のいずれかが入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つが，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。
なお，解答用紙に5つある解答欄の左肩の数字は，それぞれ大問の番号を表します。

例 1　$\boxed{\text{アイウ}}$ に -83 と答えたいとき。

1	解答欄												
	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
イ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	e
ウ	−	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	e

分数形で解答する場合は，**既約分数**で答えなさい。**符号は分子**につけ，分母につけてはいけません。

例 2　$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

1	解答欄												
	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
エ	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
オ	−	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9	e
カ	−	±	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9	e

（問題は次ページから始まる）

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい。

(1) (i) 方程式 $4^x - 2^{x+3} + 9^{\log_3 4} - 4 = 0$ ……$(*)$の解を求めたい。$t = 2^x$ とおくと，$(*)$は $t^2 - \boxed{\text{ア}}\,t + \boxed{\text{イウ}} = 0$ と表される。これを t について解くと，$t = \boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ $\left(\text{ただし} \boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}\right)$ である。したがって，$(*)$の解は，$x = \boxed{\text{カ}}$，$\log_2 \boxed{\text{キ}}$ である。

(ii) a は $a > 0$，$a \neq 1$ を満たす定数とする。x の不等式

$$\log_a(x-3) - \log_{a^2}(5-x) < \log_a\sqrt{x}$$

の解は

$$a > 1 \text{ のとき } \boxed{\text{ク}} < x < \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} < x < \boxed{\text{ス}}$$

である。

(2) i を虚数単位とし，$\alpha = -2+2\sqrt{3}\,i$，$\beta = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,i$ とする。
$0 \leqq \arg\alpha < 2\pi$，$0 \leqq \arg\beta < 2\pi$ として，α と β を極形式で表すと

$$\alpha = \boxed{\text{セ}}\left(\cos\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\pi + i\sin\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\pi\right)$$

$$\beta = \frac{1}{\boxed{\text{チ}}}\left(\cos\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\pi + i\sin\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\pi\right)$$

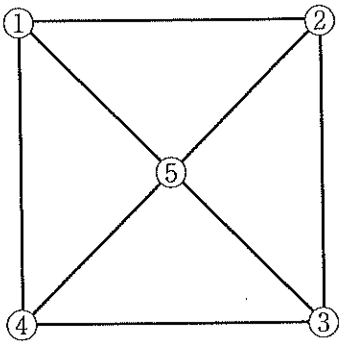
となる。

複素数平面における原点をOとする。自然数 n に対して，複素数 $4\beta^{n-1}$ と $\alpha\beta^{n-1}$ に対応する複素数平面上の点をそれぞれ A_n と B_n で表すことにする。三角形 OA_nB_n の周と内部の領域を D_n とし，領域 D_1，D_2，……，D_n の和集合の表す領域の面積を S_n とする。D_2 の面積は $\sqrt{\boxed{\text{ト}}}$ であり，$S_2 = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。
また，$S_n = S_{n-1}$ を満たす最小の自然数 $n\,(n \geqq 2)$ の値は $n = \boxed{\text{ネ}}$ である。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

2　右図のような正方形があり，2本の対角線が引かれている。4つの頂点と対角線の交点に，図のように①から⑤の番号が打たれ，それらに1個ずつ，合計5個の白石が置かれている。1個のサイコロを投げ，出た目が1から5のときは，その目と同じ番号にある石を，それが白石ならば黒石に，黒石ならば白石に置きかえ，出た目が6のときはいずれの石も置きかえない，という試行を行う。



n は正の整数とする。

(1) 「n 回の試行の後，3点①，⑤，③にある石がすべて同色である確率」を a_n とする。$a_1 = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$a_2 = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。a_{n+1} を a_n を用いて表すと，

$a_{n+1} = \dfrac{1}{\boxed{オ}} a_n + \dfrac{1}{\boxed{カ}}$ であるから，$a_n = \dfrac{1}{\boxed{キ}}\left(1 + \dfrac{1}{\boxed{ク}^{n-1}}\right)$

である。

(2) 「n 回の試行の後，3点①，⑤，③にある石がすべて同色であるか，または3点②，⑤，④にある石がすべて同色である確率」を b_n として，b_4 を求めたい。

n 回の試行の後，5点①，②，③，④，⑤に置かれた5個の石について，すべて同色である確率を p_n，黒石が1個または4個である確率を q_n，黒石が2個または3個である確率を r_n とすると，$p_n + q_n + r_n = 1$ であり

$$p_{n+1} = \frac{1}{\boxed{ケ}} p_n + \frac{1}{\boxed{コ}} q_n$$

$$q_{n+1} = \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}} p_n + \frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}} q_n + \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}} r_n$$

が成り立つ。

p_4 を求めると，$p_4 = \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツテ}}$ となる。p_4 および a_4 の値を用いて計算すると，

$b_4 = \dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ である。

(下　書　き　用　紙)

数学の試験問題は次に続く。

3 点Oを原点とする座標空間に4点A(4, −5, 2), B(4, −2, 5), C(−1, −1, 4), D(1, 1, 5)がある。点Pを直線AB上の動点，点Qを直線CD上の動点とし，$\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CQ} = q\overrightarrow{CD}$ (p，qは実数) とおく。

(1) 3点O，P，Qが一直線上にあるとき

$$p = \boxed{\text{ア}},\quad q = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(2) 直線PQが直線ABに垂直であるとき

$$\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}\,p + q = 0$$

が成り立つ。

(3) 線分PQの長さが最小となるようなP，Qの座標は

$$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サ}}\right)$$

である。

2点$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{Q_1}$を

$$\mathrm{P_1}\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}\right),\quad \mathrm{Q_1}\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サ}}\right)$$

とする。このとき，2平面$\mathrm{P_1Q_1A}$，$\mathrm{P_1Q_1C}$のなす角をθ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$とすると

$$\theta = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi$$

である。

ただし，2平面α，βが平行でないとき，2平面α，βのなす角とは，2平面の交線l上の1点をTとし，平面α，β上における，Tを通りlに垂直な直線をそれぞれm_α，m_βとしたとき，2直線m_α，m_βのなす角である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

4 a, b, c, d を実数の定数とし，関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x<-1 \text{ のとき}) \\ bx^2-x-3b+2c & (-1 \leqq x<2 \text{ のとき}) \\ (1-c)x^3+4bx^2-3x+7c-5d & (2 \leqq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ がすべての実数 x において微分可能であるとき

$$a=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ b=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\ c=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ d=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。以下，この条件のもとで考える。

(1) 方程式

$$f(x)=k \quad (k \text{ は実数の定数})$$

が相異なる3個の実数解 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとき，k のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}<k<\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。また，k がこの範囲を動くとき，α のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}-\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}}{\boxed{\text{チ}}}<\alpha<\boxed{\text{ツ}}$ である。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフを C とし，C 上に点 $\mathrm{P}(2,\ f(2))$ をとる。点Pにおける C の法線と C との交点のうち，$x<0$ の部分にあるものをQとする。C 上の $2<x<4$ の部分に点Rをとるとき，三角形QPRの面積が最大となるときのRの座標は

$$\mathrm{R}\left(\boxed{\text{テ}}+\sqrt{\boxed{\text{ト}}},\ \frac{\boxed{\text{ナ}}+\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}\right)$$

である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{5}$　2つの関数

$y = ax^2 + 1$　(a は実数の定数)

$y = 2\log x$

のグラフをそれぞれ C_1, C_2 とする。2曲線 C_1, C_2 はただ1点を共有し，その点において共通な接線をもっている。このとき，定数 a の値は $a = \dfrac{\boxed{ア}}{e^{\boxed{イ}}}$ である。以下，この条件のもとで考える。

(1)　2曲線 C_1, C_2 および直線 $x = 1$ で囲まれた図形を D とする。

D の面積を T とすると

$$T = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}e - \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}\,e^{\boxed{キ}}} - \boxed{ク}$$

である。

また，D を y 軸の周りに1回転してできる立体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\left(e^{\boxed{サ}} - \frac{\boxed{シ}}{e^{\boxed{ス}}} - \boxed{セ}\right)\pi$$

である。

(2)　曲線 C_2 の $\sqrt{5} \leqq x \leqq 2\sqrt{3}$ の部分の長さを L とすると，L は定積分

$$\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^{\boxed{ソ}} + \boxed{タ}}}{x}\,dx$$

で求められる。

$\sqrt{x^{\boxed{ソ}} + \boxed{タ}} = t$ とおいて置換積分を行うと，

$$L = \boxed{チ} + \log\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$$

である。