平成３０年度　入学者選抜試験問題

一般入学試験

数　学　(70分)

I　注意事項

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　この問題冊子は16ページあります。ただし，出題ページは下記のとおりです。
　4，6，8，10，12ページ

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督員に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**

　受験番号を記入し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄**

　氏名・フリガナを記入しなさい。

5　試験開始後30分間および試験終了前５分間は退出できません。

6　この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。**この問題冊子は試験終了後回収します。**

II　解答上の注意

1　**「解答上の注意」が，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。**

受　験　番　号			

解答上の注意

解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がない限り，数字（0～9），符号（－，±），自然対数の底（e）のいずれかが入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つが，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。
なお，解答用紙に5つある解答欄の左肩の数字は，それぞれ大問の番号を表します。

例1　$\boxed{\text{アイウ}}$ に -83 と答えたいとき。

1	解	答	欄										
	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
イ	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	e
ウ	－	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	e

分数形で解答する場合は，**既約分数**で答えなさい。**符号は分子**につけ，分母につけてはいけません。

例2　$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

1	解	答	欄										
	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
エ	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
オ	－	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9	e
カ	－	±	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9	e

（問題は次ページから始まる）

1 次の問いに答えなさい。

(1) 複素数の偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ で考え，i は虚数単位とする。

2つの複素数 α，β はそれぞれ

$$\alpha^3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad 0 \leqq \arg \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$$

$$\beta^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i,\quad 0 \leqq \arg \beta \leqq \frac{\pi}{2}$$

を満たしている。このとき

$$\arg(\alpha^3\beta^3) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}\pi,\ \arg\left(\frac{\alpha^3}{\beta^3}\right) = \frac{\pi}{\boxed{\text{エオ}}}$$

である。

$z = \dfrac{\alpha}{\beta}$ とおくと，$1 + z + z^2 + \cdots\cdots + z^{n-1} = 0$ を満たす最小の自然数 n の値は

$n = \boxed{\text{カキ}}$ であり，$2z^{96} + \dfrac{1}{2z^{96}} = \dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}} + \dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}i$ である。

(2) a，b は正の整数とし，$a \geqq b$ とする。

三角形ABCにおいて，$\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{CA} = b$，$\angle \mathrm{BCA} = \dfrac{\pi}{2}$ とし，三角形ABCの内接円の半径を r とする。このとき

$$a + b - \boxed{\text{セ}}\,r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

が成り立つ。

$r = 2$ のとき，組 $(a,\ b)$ は

$$(a,\ b) = \left(\boxed{\text{ソ}},\ \boxed{\text{タ}}\right),\ \left(\boxed{\text{チツ}},\ \boxed{\text{テ}}\right)$$

である。

また，$r = 2^{100}$ のとき，組 $(a,\ b)$ は全部で $\boxed{\text{トナニ}}$ 組ある。

ある3以上の素数 p について，$r = p^{100}$ のとき，組 $(a,\ b)$ は全部で $\boxed{\text{ヌネノ}}$ 組ある。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{2}$ 箱の中に，Aと書かれたカードがm枚，Bと書かれたカードが$(150-m)$枚入っている（mは$0 \leqq m \leqq 150$を満たす整数）。また，袋Aの中には赤球が7個，白球が2個，袋Bの中には赤球が2個，白球が7個入っている。

箱の中から1枚のカードを取り出し，カードに書かれた文字の袋の中から1個の球を取り出す。ただし，取り出したカードと球はそれぞれもとに戻すものとする。

この試行をn回（nは正の整数）繰り返す。

(1) $m=30$, $n=6$とする。

赤球をちょうど2回取り出す確率は$\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエオ}}}$である。

白球を連続して取り出すことがない確率は$\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケコ}}}$である。

(2) $m=30$, $n=10$とする。

赤球を5回以上連続して取り出す確率は$\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$である。

また，赤球を5回以上連続して取り出したとき，4回目の試行で白球を取り出している確率は$\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$である。

(3) $n=100$とする。

赤球をk回（kは$0 \leqq k \leqq 100$を満たす整数）取り出す確率をp_kとする。p_kが最大となるkの値が70であるとき，mのとり得る値は，$\boxed{\text{トナニ}}$または$\boxed{\text{ヌネノ}}$である。ただし，$\boxed{\text{トナニ}} < \boxed{\text{ヌネノ}}$とする。

(下　書　き　用　紙)

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{3}$　三角形OABにおいて，辺OAを2：1に内分する点をC，辺OBを1：2に内分する点をDとする。

線分AD，BCの交点をEとするとき

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{OB}$$

である。

線分OEの延長と辺ABの交点をFとするとき

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{カ}}{\boxed{オ}}\overrightarrow{OB}$$

である。

三角形OABと三角形CFDの面積比は

$$\frac{\triangle CFD}{\triangle OAB} = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$$

である。

三角形OABの面積が$10\sqrt{3}$であり，三角形CFDが正三角形のとき

$$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CF} = \frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$$

であり

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{\boxed{スセ}}$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タチ}}$$

である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{4}$ 関数$f_n(x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$が

$$\begin{cases} f_1(x)=\cos x \\ f_{n+1}(x)=\cos x + x\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\cos t\,dt \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

を満たしている。

数列$\{a_n\}$を

$$a_n=\int_0^{\pi} f_n(t)\cos t\,dt \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定義する。このとき

$$a_1=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$$

である。a_{n+1}をa_nを用いて表すと

$$a_{n+1}=-\boxed{\text{ウ}}\,a_n+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$$

であり，数列$\{a_n\}$の一般項a_nは

$$a_n=\left\{\frac{\left(-\boxed{\text{カ}}\right)^{n-1}}{\boxed{\text{キ}}}+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right\}\pi$$

である。

kを正の整数とする。無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k^n}\cdot\frac{\left(-\boxed{\text{カ}}\right)^{n-1}}{\boxed{\text{キ}}}\pi\right\}$が収束するような$k$の値の最小値は

$$k=\boxed{\text{コ}}$$

である。$k \geqq \boxed{\text{コ}}$のとき，無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{k^n}$も収束し，その和を$S_k$とすると，

$$\sum_{k=\boxed{\text{コ}}}^{\infty}\frac{6S_k}{\pi k}=\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$$

である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{5}$ 座標空間において原点O(0, 0, 0)と3点A(4, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 2, 2)を頂点とする四面体OABCがある。この四面体をz軸の周りに1回転してできる立体の体積Vを求めよう。

tを$0 \leqq t \leqq 2$を満たす実数とする。平面$z = t$と線分AC, BC, OCとの交点をそれぞれP, Q, Rとする。このとき, P, Q, Rの座標は

$$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}t,\ t,\ t\right),\ \mathrm{Q}\left(0,\ \boxed{\text{ウ}},\ t\right),\ \mathrm{R}(0,\ t,\ t)$$

である。

また, 平面$z = t$とz軸との交点をH(0, 0, t)とすると

$$\mathrm{HQ}^2 = \boxed{\text{エ}},\ \mathrm{HP}^2 = \boxed{\text{オ}}t^2 - \boxed{\text{カキ}}t + \boxed{\text{クケ}}$$

である。

よって

$0 \leqq t < \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき, $\mathrm{HP} > \mathrm{HQ}$

$\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \leqq t \leqq 2$ のとき, $\mathrm{HP} \leqq \mathrm{HQ}$

となる。

この結果, 四面体OABCをz軸の周りに1回転してできる立体を平面$z = t$で切った断面の面積$S(t)$は

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき, $S(t) = \pi\left(\boxed{\text{シ}}t^2 - \boxed{\text{スセ}}t + \boxed{\text{ソタ}}\right)$

$\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \leqq t \leqq 2$ のとき, $S(t) = \pi\left(\boxed{\text{チ}}t^2 + \boxed{\text{ツ}}\right)$

となる。

したがって

$$V = \frac{\boxed{\text{テトナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}\pi$$

となる。