平成２９年度　入学者選抜試験問題

一般入学試験

数　学 (70分)

Ⅰ　**注意事項**

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　この問題冊子は16ページあります。ただし，出題ページは下記のとおりです。
　4, 6, 8, 10, 12ページ

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督員に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**
　受験番号を記入し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄**
　氏名・フリガナを記入しなさい。

5　試験開始後30分間および試験終了前５分間は退出できません。

6　この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。**この問題冊子は試験終了後回収します。**

Ⅱ　**解答上の注意**

1　**「解答上の注意」が，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。**

受　験　番　号			

解答上の注意

解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がない限り，数字（0〜9），符号（−，±），自然対数の底（e）のいずれかが入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つが，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。
なお，解答用紙に５つある解答欄の左肩の数字は，それぞれ大問の番号を表します。

例 1 $\boxed{\text{アイウ}}$ に -83 と答えたいとき。

1	解					答				欄			
	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
イ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	e
ウ	−	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	e

分数形で解答する場合は，**既約分数**で答えなさい。**符号は分子**につけ，分母につけてはいけません。

例 2 $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

1	解					答				欄			
	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
エ	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
オ	−	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9	e
カ	−	±	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9	e

（問題は次ページから始まる）

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい。

(1) 実数 x, y についての式 F を

$$F = 4^{x+1} + 4^{y+1} - 2^{x+2} - 2^{y+2} - 10$$

とする。

$y = 0$ のとき, x がすべての実数値をとるならば, F は, $x = \boxed{\text{アイ}}$ で最小値 $\boxed{\text{ウエオ}}$ をとる。

また, $y = -x$ であるとき, $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくと, F は t を用いて

$$F = \boxed{\text{カ}}\, t^2 - \boxed{\text{キ}}\, t - \boxed{\text{クケ}}$$

と表せるから, x がすべての実数値をとるとき, F は最小値 $\boxed{\text{コサシ}}$ をとる。

(2) 関数 $f(x)$ を $f(x) = x - [x]$ とする。ただし, 実数 x に対し, $[x]$ は x を超えない最大の整数とする。

a, b を正の整数とし, 2 つの集合 A, B を

$$A = \{x \mid f(ax) = 0,\ 0 \leqq x \leqq 2\}$$

$$B = \{x \mid f(bx) = 0,\ 0 \leqq x \leqq 2\}$$

とする。

$f(ax) = 0$ が成り立つとき, ax は整数であるから, 集合 A, B の要素の個数をそれぞれ $n(A)$, $n(B)$ とすると

$$n(A) = \boxed{\text{ス}}\, a + \boxed{\text{セ}}, \quad n(B) = \boxed{\text{ス}}\, b + \boxed{\text{セ}}$$

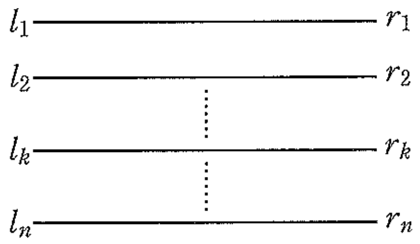
である。

$n(A) = 131$, $n(B) = 183$ のとき, $a = \boxed{\text{ソタ}}$, $b = \boxed{\text{チツ}}$ であり, $n(A \cap B) = \boxed{\text{テト}}$ である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

2　n を正の整数とする。長さが等しい n 本のひもがある。これらに1本ずつ異なる番号1，2，……，n をつけ，番号 k のひもの両端を l_k，r_k とし区別する。



ひもの端 $2n$ か所から無作為に2か所ずつ選び，それらをそれぞれ結ぶ。

例えば，$n=2$ の場合は，2本のひもがつながって1つの輪ができるか，2つの輪ができるかのいずれかである。

(1)　$n=3$ のとき，すべてのひもがつながって1つの輪ができる確率を求める。

ひもの端6か所を2つずつ結ぶ方法は，異なる6個のものを2個ずつの3つの組に分ける方法に等しいから，$\boxed{\text{アイ}}$ 通りある。

3本のひもがつながって1つの輪ができる場合，l_1 は r_1 以外と結ぶから，l_1 を結ぶ端の選び方は，$\boxed{\text{ウ}}$ 通り。l_1 と l_2 を結んだとすると，r_2 は l_3 または r_3 と結ぶから，2通り。残った2か所を結ぶ方法は1通りとなる。

よって，3本のひもがつながって1つの輪ができる結び方は，$\boxed{\text{エ}}$ 通りである。

したがって，$n=3$ のとき，すべてのひもがつながって1つの輪ができる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(2)　$n=4$ のとき，すべてのひもがつながって1つの輪ができる確率は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

(3)　$n=5$ のとき，ちょうど2つの輪ができる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソタ}}}$ である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{3}$ 底面の正方形ABCDの1辺の長さが$\sqrt{2}$，高さが1の正四角錐O－ABCDを考える。ただし，正四角錐とは底面が正方形で，側面がすべて合同な二等辺三角形である角錐をいう。辺OCの中点をM, 正方形ABCDの対角線の交点をKとし，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$とする。

このとき

$$|\vec{a}|=\sqrt{\boxed{\text{ア}}},\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{イ}}$$

である。

線分AMと平面OBDの交点をNとするとき

$$\overrightarrow{ON}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{OK}$$

である。

辺OB上に点Pを$\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OB}$ $(0<p\leqq 1)$となるようにとり，辺OD上に点Qを$\overrightarrow{OQ}=q\overrightarrow{OD}$ $(0<q\leqq 1)$となるようにとり，4点A，M，P，Qが同一平面上にあるようにする。

$p=1$のとき$q=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$である。

pがとり得る値の最小値は

$$p=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

4点A，M，P，Qが同一平面上にある条件から，pとqの間に

$$\boxed{\text{ケ}}\,pq=p+q$$

という関係が成り立つ。

線分PQの長さの2乗は$\mathrm{PQ}^2=\boxed{\text{コ}}(p+q)^2-\boxed{\text{サ}}\,pq$と表せる。$p+q$の最小値は$\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$であるから，線分PQの長さは$p=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$のとき，最小値$\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$をとる。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{4}$　次の問いに答えなさい。

(1)　p を実数の定数とするとき，数列 $\{n^p\}$ (n は自然数) の和を

$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + \cdots\cdots + n^p$ とおく。

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \qquad \cdots\cdots①$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \qquad \cdots\cdots②$$

$$S_3(n) = \frac{1}{\boxed{\text{ア}}}n^4 + \frac{1}{\boxed{\text{イ}}}n^3 + \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}n^2 \qquad \cdots\cdots③$$

である。次の方法で $S_4(n)$ を求める。

二項定理から

$$(k+1)^5 - k^5 = \boxed{\text{エ}}\,k^4 + \boxed{\text{オカ}}\,k^3 + \boxed{\text{オカ}}\,k^2 + \boxed{\text{エ}}\,k + 1$$

である。この式の k に 1 から n までを代入して得られる n 個の式の辺々をそれぞれ加えると

$$(n+1)^5 - 1^5$$

$$= \boxed{\text{エ}}\,S_4(n) + \boxed{\text{オカ}}\,S_3(n) + \boxed{\text{オカ}}\,S_2(n) + \boxed{\text{エ}}\,S_1(n) + n$$

となる。①，②，③より

$$S_4(n) = \frac{1}{\boxed{\text{キ}}}n^5 + \frac{1}{\boxed{\text{ク}}}n^4 + \frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}n^3 - \frac{1}{\boxed{\text{コサ}}}n$$

となる。

(2)　n を 2 以上の整数とする。

1^2 から n^2 までの異なる n 個の平方数 (整数を 2 乗した数)

1，4，9，16，25，……，n^2

の中から異なる 2 個の数を取り出してつくった積すべての和を T とする。

(1) の $S_p(n)$ を用いると

$$T = \frac{1}{\boxed{\text{シ}}}\left[\left\{S_{\boxed{\text{ス}}}(n)\right\}^{\boxed{\text{セ}}} - S_{\boxed{\text{ソ}}}(n)\right]$$

$$= \frac{1}{18}n^6 + \frac{1}{\boxed{\text{タチ}}}n^5 - \frac{5}{\boxed{\text{ツテ}}}n^4 - \frac{1}{\boxed{\text{トナ}}}n^3 + \frac{1}{72}n^2 + \frac{1}{60}n$$

である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{5}$ 自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x) = x + \log\dfrac{1+e^x+e^{2x}+\cdots\cdots+e^{(n-1)x}}{n}$ で定める。ただし，対数は自然対数である。

このとき

$$f_n(0) = \boxed{\text{ア}}$$

である。

数列 $\{a_n\}$ を，$a_n = \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f_n(x)}{x}$ で定める。一般に，微分可能な関数 $g(x)$ の $x=t$ における微分係数 $g'(t)$ は，$g'(t) = \displaystyle\lim_{x\to t}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}$ であることから

$$a_n = \frac{n + \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

となる。

よって

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \boxed{\text{エ}} - \frac{\boxed{\text{オ}}}{n + \boxed{\text{カ}}}$$

であり

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \boxed{\text{キ}}$$

である。

数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)^2\left(\frac{n+3}{n}\right)^3\cdots\cdots\left(\frac{n+n}{n}\right)^n\right\}^{\frac{1}{4a_na_{n+1}}}$$

で定める。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = e^l$ とするとき

$$l = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。