獨協医科大学 医学部

平成２７年度　入学者選抜試験問題

一般入学試験

数　学 （70分）

Ⅰ　**注意事項**

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　この問題冊子は16ページあります。ただし，出題ページは下記のとおりです。

　4，6，8，10，12ページ

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督員に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**

受験番号を記入し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄**

氏名・フリガナを記入しなさい。

5　試験開始後30分間および試験終了前５分間は退出できません。

6　この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。**この問題冊子は試験終了後回収します。**

Ⅱ　**解答上の注意**

1　**「解答上の注意」が，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。**

受験番号			

解答上の注意

解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がない限り，数字（０～９），符号（－，±），自然対数の底（e）のいずれかが入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つが，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。
なお，解答用紙に５つある解答欄の左肩の数字は，それぞれ大問の番号を表します。

例１　$\boxed{\text{アイウ}}$ に －８３ と答えたいとき。

1	解				答				欄				
	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
イ	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	e
ウ	－	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	e

分数形で解答する場合は，**既約分数**で答えなさい。**符号は分子**につけ，分母につけてはいけません。

例２　$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

1	解				答				欄				
	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
エ	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
オ	－	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9	e
カ	－	±	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9	e

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい。

(1) 定数 a を正の実数とする。関数

$$f(\theta) = 4\sin 2\theta + 6\cos^2\theta + 4a(\sin\theta + 2\cos\theta) + a^2 + 1$$

の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ における最大値を M，最小値を m とする。

$t = \sin\theta + 2\cos\theta$ とおく。$f(\theta)$ を t を用いて表すと

$$f(\theta) = \boxed{\text{ア}}\, t^2 + 4at + a^2 - \boxed{\text{イ}}$$

である。

$M = a^2 + \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\,a + \boxed{\text{オ}}$ であり，これを与える θ の値を θ_0 とすると，$\tan\theta_0 = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

また，$M - m = 14$ となる a の値は，$a = \sqrt{\boxed{\text{ク}}} - \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(2) 定数 m を正の整数とする。

xy 平面上に 2 点 A(21, 0), B(0, m) がある。点 (1, 0) と直線 AB との距離を d とすると

$$d = \frac{\boxed{\text{コサ}}\, m}{\sqrt{m^2 + \boxed{\text{シスセ}}}}$$

である。

d が有理数となるような m の値は全部で $\boxed{\text{ソ}}$ 個あり，そのうち m の値が最大のものは $m = \boxed{\text{タチツ}}$ である。

また，d が整数となるとき，$m = \boxed{\text{テト}}$，$d = \boxed{\text{ナニ}}$ である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{2}$ 正 n 角形 $P_1P_2P_3 \cdots P_n$(n は 4 以上の整数)を K とする。

K の頂点と各辺の中点の合計 $2n$ 個の点から異なる 3 点を選び，それらを線分で結んでできる図形を T とする。

(ただし，K の 1 つの頂点とそれに隣接する中点の一方を結ぶ線分を 1 辺とする三角形，例えば辺 P_1P_2 の中点を M_1 として，三角形 $P_1M_1P_3$ なども「K と辺を共有する三角形」とする。)

(1) $n = 5$ とする。

T が三角形となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

T が二等辺三角形となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

T が K と辺を共有しない三角形となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(2) T が三角形となる確率は

$$\frac{\boxed{\text{コ}}\,n^2 - \boxed{\text{サ}}\,n - \boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}\left(\boxed{\text{セ}}\,n - \boxed{\text{ソ}}\right)\left(n - \boxed{\text{タ}}\right)}$$

である。

T が K と辺を共有しない三角形となる確率は

$$\frac{\boxed{\text{チ}}\,n^2 - \boxed{\text{ツテ}}\,n + \boxed{\text{トナ}}}{\left(\boxed{\text{セ}}\,n - \boxed{\text{ソ}}\right)\left(n - \boxed{\text{タ}}\right)}$$

である。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{3}$ a, bを実数の定数とする。Oを原点とする座標空間内に3点A$(1,\ 2,\ 0)$, B$(2,\ 0,\ 4)$, C$(a,\ b,\ 1)$がある。

三角形OABにおいて，点Oから直線ABに下ろした垂線と直線ABの交点をHとする。点Hの座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

である。

点Aから直線OBに下ろした垂線と線分OHの交点をKとする。点Kの座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}},\ \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\right)$$

である。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$は$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$に垂直で，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$は$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$に垂直であるとする。このとき

$$a = \boxed{\text{セソ}},\ b = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。以下で，a, bはこの値であるとする。

線分CK上に$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$が$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$に垂直になるように点Lをとるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \left(\boxed{\text{ツ}},\ \boxed{\text{テ}},\ \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\right)$$

である。そのとき，$\overrightarrow{\mathrm{LK}}$は$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$に垂直である。

平面OABにおいて，三角形KABの外接円の周上に点Pをとるとき，線分LPの長さの最大値は$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{4}$ xy 平面上に直線 $l : y = \dfrac{1}{2}x$ がある。

自然数 n に対して，この平面上に，正方形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ を次のように定める。

$\mathrm{A}_1\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$

正方形の頂点は時計回りに A_n，B_n，C_n，D_n とする。

頂点 A_n，D_n は x 軸上にあり，頂点 B_n は直線 l 上にある。

頂点 A_n の x 座標は頂点 D_n の x 座標より小さい。

頂点 D_n を頂点 A_{n+1} とする。

頂点 A_n の x 座標を x_n，正方形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ の面積を S_n とする。

(1) 正方形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ の1辺の長さは $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x_n$ である。

また，正方形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ の対角線の交点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}x_n,\ \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x_n\right)$

であるから，すべての自然数 n に対して正方形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ の対角線の交点は

直線 $y = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}x$ 上にある。

(2) x_{n+1} を x_n で表すと $x_{n+1} = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}x_n$ である。よって $x_n = \dfrac{3^{\boxed{\text{サ}}}}{2^{\boxed{\text{シ}}}}$ である。

ただし，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ には，次の ①～⑥ の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと。

① $-n-1$　② $-n$　③ $n-2$　④ $n-1$　⑤ n　⑥ $n+1$

(3) $T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$ とおく。$T_n > 1$ となる最小の n は $\boxed{\text{ス}}$ である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

5　$x > -1$ で定義された関数 $f(x)$ は，等式

$$(x+1)f(x) - \int_0^x f(t)\,dt = \log(x+1) + x - 1$$

を満たしている。

(1)　このとき $f(0) = \boxed{\text{アイ}}$ であり，さらに

$$f'(x) = \frac{x + \boxed{\text{ウ}}}{\left(x + \boxed{\text{エ}}\right)^{\boxed{\text{オ}}}}$$

である。

(2)　これをもとに $f(x)$ を求めると $f(x) = \boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ には，次の ①～⑥ の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと。なお，同じ選択肢を選んでもよいものとする。

①　$\log x$　②　$\log(x+1)$　③　$x\log(x+1)$　④　$\dfrac{1}{x}$　⑤　$\dfrac{1}{x+1}$　⑥　$\dfrac{x}{x+1}$

(3)　$a > 0$ とする。関数 $g(x) = \log x$ について，区間 $[a,\ a+1]$ で平均値の定理を用いると，$g(a+1) - g(a) = \boxed{\text{ク}}$ となる実数の定数 c が区間 $\boxed{\text{ケ}}$ に存在する。これを用いると自然数 m に対する $f(e^m)$ と m の大小は $f(e^m)\ \boxed{\text{コ}}\ m$ となることがわかる。ただし，$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ には，次の選択肢 I の ①～⑦ の中から，$\boxed{\text{コ}}$ には，選択肢 II の ①～③ の中から最も適切なものをそれぞれ一つずつ選ぶこと。

選択肢 I

①　c　②　$c+1$　③　$\dfrac{1}{c}$　④　$\dfrac{1}{c+1}$　⑤　$\log c$　⑥　$[a,\ a+1]$　⑦　$(a,\ a+1)$

選択肢 II

①　$<$　②　$>$　③　$=$

(4)　さらに

$$\int_0^{e^x-1} f(t)\,dt = \left(x - \boxed{\text{サ}}\right)\left(e^x - \boxed{\text{シ}}\right)$$

となるので，自然数 n に対して $p(n) = e^{\frac{2}{3n}} - 1$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{p(n)} f(t)\,dt = \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。