獨協医科大学 医学部

平成２６年度　入学者選抜試験問題

一般入学試験

数　学 (70分)

Ⅰ　**注意事項**

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　この問題冊子は16ページあります。ただし，出題ページは下記のとおりです。

4，6，8，10，12ページ

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督員に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**

受験番号を記入し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄**

氏名・フリガナを記入しなさい。

5　試験開始後30分間および試験終了前５分間は退出できません。

6　この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。**この問題冊子は試験終了後回収します。**

Ⅱ　**解答上の注意**

1　**「解答上の注意」が，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。**

受　験　番　号			

（問題は次ページから始まる）

$\boxed{1}$　次の問いに答えなさい。

(1)　aを正の定数とし，xについての2つの不等式

$$\log_3(x+2a)+\log_3(x+3a)<\log_3 10ax \quad \cdots\cdots①$$

$$\log_3(3x-4)+\log_3(3x+2)<2\log_9(6x-5)+1 \cdots\cdots②$$

を考える。

①の解は

$$\boxed{\text{ア}}\,a<x<\boxed{\text{イ}}\,a$$

である。

②の解は

$$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}<x<\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

①，②をともに満たす実数xが存在するとき，aのとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}<a<\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

である。

(2)　放物線$C: y=\dfrac{1}{2}x^2$上に2点P，Qがある。P，Qのx座標をそれぞれp，qとしたとき，p，qは$q<p$を満たす整数で，$p>0$，$p+q$は正の偶数とする。

また，点Pにおける放物線Cの接線をl，2点P，Qを通る直線をmとし，直線l，mがx軸の正の向きとなす角をそれぞれα，$\beta\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，2直線$l$，$m$のなす角を$\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とする。

$p=5$，$q=1$のとき

$$\tan\alpha=\boxed{\text{サ}},\ \tan\beta=\boxed{\text{シ}}$$

であり

$$\tan\theta=\frac{1}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

また，$\tan\theta=\dfrac{1}{7}$を満たす整数p，qの組$(p,\ q)$をすべてあげると，

$$(p,\ q)=\left(\boxed{\text{セ}},\ \boxed{\text{ソ}}\right),\ \left(\boxed{\text{タチ}},\ \boxed{\text{ツテ}}\right),\ \left(\boxed{\text{トナ}},\ \boxed{\text{ニヌネ}}\right)$$

である。ただし，$\boxed{\text{セ}}<\boxed{\text{タチ}}<\boxed{\text{トナ}}$とする。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{2}$ m は正の整数とする。箱の中に，1と書かれたカードが1枚，2と書かれたカードが2枚，3と書かれたカードが3枚，……，$2m$ と書かれたカードが $2m$ 枚入っている。この箱の中から，1枚のカードを取り出し，書かれている数字を記録してからもとに戻す操作を n 回繰り返す。

(1) 箱の中にカードは全部で

$$m\left(\boxed{\text{ア}}\,m+\boxed{\text{イ}}\right)\text{ 枚}$$

入っている。

(2) $n=1$ のとき，偶数のカードを取り出す確率は

$$\frac{m+\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}\,m+\boxed{\text{オ}}}$$

である。

また，$n=2$ のとき，記録した2個の数の和が偶数である確率は

$$\frac{\boxed{\text{カ}}\,m^2+\boxed{\text{キ}}\,m+\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}\,m^2+\boxed{\text{コ}}\,m+\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(3) 記録した n 個の数の和が偶数である確率を p_n とする。p_n を m，n を用いて表すと

$$p_n=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\left(\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}\,m+\boxed{\text{タ}}}\right)^n+\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{3}$ 空間に，同一直線上にない3点O，A，Bがあり，条件

$$|\overrightarrow{OA}|=2,\ |\overrightarrow{OB}|=1,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$$

を満たしている。O，A，Bを通る平面をαとし，α上にない点Pを次の条件を満たすようにとる。

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=2,\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$$

点Pから平面αに下ろした垂線とαとの交点をHとすると

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{OA}-\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{OB}$$

となる。$|\overrightarrow{OP}|=p$とおくと，△OPHの面積は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}\,p^2-\boxed{\text{ク}}}$$

と表される。

△OABの面積が△OPHの面積の2倍に等しいとき

$$p^2=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

である。またこのとき，$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{PO}$を満たす点Qをとると，四面体QOAHの体積は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セソ}}}$$

である。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{4}$ 行列 $A=r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ で表される1次変換 f について考える。点 P_0 の座標を (1, 0) とし，n を正の整数とするとき，f によって点 P_{n-1} が移される点を P_n とする。また，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ となる点 Q_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とし，$n\to\infty$ のときに x_n, y_n がともに収束する場合の点 Q_n の極限値 $\mathrm{Q}\left(\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n,\ \lim_{n\to\infty}y_n\right)$ を求めよう。

(1) $r=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$A^3=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\begin{pmatrix}\boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{オ}}\\ \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{エ}}\end{pmatrix}$ であり，P_7 の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キクケ}}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{キクケ}}}\right)$ である。

(2) $E-A$ が逆行列をもたない r，θ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ の条件は，$r=\boxed{\text{サ}}$ かつ $\theta=\boxed{\text{シ}}$ である。ただし，E は単位行列とする。

$E-A$ が逆行列をもつとき，n を2以上の整数とすると

$(E-A)(E+A+A^2+\cdots\cdots+A^{n-1})=E-A^n$ より

$$E+A+A^2+\cdots\cdots+A^{n-1}=(E-A)^{-1}(E-A^n)$$

また，$(E-A)^{-1}=\dfrac{1}{r^2-2r\cos\theta+1}\begin{pmatrix}1-r\cos\theta & -r\sin\theta\\ r\sin\theta & 1-r\cos\theta\end{pmatrix}$ であるから

$(E-A)^{-1}(E-A^n)=\dfrac{1}{r^2-2r\cos\theta+1}T$ とすると

$$T=\begin{pmatrix}1-r\cos\theta-r^n\boxed{\text{ス}}+r^{n+1}\boxed{\text{セ}} & -r\sin\theta+r^n\boxed{\text{ソ}}-r^{n+1}\boxed{\text{タ}}\\ r\sin\theta-r^n\boxed{\text{ソ}}+r^{n+1}\boxed{\text{タ}} & 1-r\cos\theta-r^n\boxed{\text{ス}}+r^{n+1}\boxed{\text{セ}}\end{pmatrix}$$

である。ただし，$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ には，次の①〜⑥の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと。なお，同じ選択肢を選んでもよいものとする。

① $\sin n\theta$　　② $\cos n\theta$　　③ $\sin(n-1)\theta$

④ $\cos(n-1)\theta$　　⑤ $\sin(n+1)\theta$　　⑥ $\cos(n+1)\theta$

$0\leqq r<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ はともに収束し，さらに $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とすると，

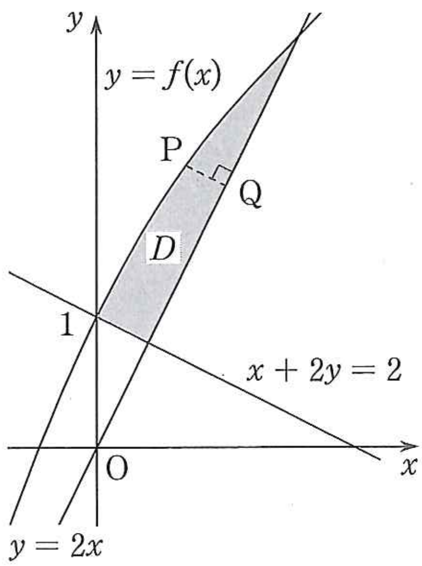
$$\mathrm{Q}\left(\frac{\boxed{\text{チ}}-r}{\boxed{\text{ツ}}-2r+\boxed{\text{テ}}r^2},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}\,r}{\boxed{\text{ツ}}-2r+\boxed{\text{テ}}r^2}\right)$$

である。

(下　書　き　用　紙)

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=2x+\cos x$ がある。xy 平面上の曲線 $y=f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分を C とし，C と直線 $y=2x$，および直線 $x+2y=2$ で囲まれた領域を D とする。領域 D を直線 $y=2x$ の周りに1回転してできる立体の体積を求めよう。



C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ から直線 $y=2x$ に下ろした垂線と直線 $y=2x$ との交点を Q とする。

線分 PQ の長さは

$$\frac{|\cos t|}{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}$$

であり，点 Q の x 座標は

$$t+\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\cos t$$

である。これから，$\mathrm{OQ}=s$ とおくと

$$s=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\left(t+\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\cos t\right)$$

である。

$f'(x)=2-\sin x>0$ なので $f(x)$ は増加する。よって，求める体積 V は

$$V=\int_{\frac{2\sqrt{5}}{5}}^{\frac{\sqrt{5}\pi}{2}} \pi \mathrm{PQ}^2\,ds$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\,\pi}{\boxed{\text{カ}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 t-\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\cos^2 t\sin t\right)dt$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\,\pi^2}{\boxed{\text{コサ}}}-\frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\,\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$$

である。