獨協医科大学 医学部

平成２５年度　入学者選抜試験問題

一般入学試験

数　学　(70分)

Ⅰ　**注意事項**

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　この問題冊子は16ページあります。ただし，出題ページは下記のとおりです。

　　4，6，8，10，11，12ページ

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督員に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

　①　**受験番号欄**

　　受験番号を記入し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

　②　**氏名欄**

　　氏名・フリガナを記入しなさい。

5　試験開始後30分間および試験終了前５分間は退出できません。

6　この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。**この問題冊子は試験終了後回収します。**

Ⅱ　**解答上の注意**

1　**「解答上の注意」が，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。**

受　験　番　号			

解答上の注意

解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がない限り，数字（0～9），符号（−，±），自然対数の底（e）のいずれかが入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つが，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。
なお，解答用紙に5つある解答欄の左肩の数字は，それぞれ大問の番号を表します。

例1　$\boxed{\text{アイウ}}$ に −８３ と答えたいとき。

1	解	答	欄										
	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
イ	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9	e
ウ	−	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9	e

分数形で解答する場合は，**既約分数**で答えなさい。**符号は分子**につけ，分母につけてはいけません。

例2　$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

1	解	答	欄										
	−	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
エ	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	e
オ	−	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9	e
カ	−	±	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9	e

（問題は次ページから始まる）

$\boxed{1}$ aを実数の定数とし，2 次関数

$$f(x) = x^2 - (2a + 3)x - 3a^2 + 13a$$

について考える。また，座標平面上で，放物線$y = f(x)$をCとする。

(1) Cとx軸が異なる 2 点で交わるとき，aのとり得る値の範囲は

$$a < \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} < a$$

である。さらに，Cとx軸との 2 つの交点がともに$x > 3$の領域に含まれるとき，aのとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} < a < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

(2) aを整数とする。bを正の整数とし，1 次関数

$$g(x) = 2x - 2a^2 + a + b + 7$$

を考える。このとき，座標平面上における直線$y = g(x)$をlとし，Cとlの異なる 2 つの交点のx座標がともに素数となるようなa，bの値の組を求めたい。

そこで，xについての方程式

$$f(x) = g(x)$$

の 2 つの解をα，β（$\alpha < \beta$）とおく。解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \boxed{\text{ケ}}\,a + \boxed{\text{コ}}$$

となるので，α，βが素数であるとき，αの値は

$$\alpha = \boxed{\text{サ}}$$

であることがわかる。これより，a，bの満たすべき関係式

$$a^2 - \boxed{\text{シ}}\,a + b + \boxed{\text{スセ}} = 0$$

が得られるので，与えられた条件を満たすa，bの値の組は

$$(a,\ b) = \left(\boxed{\text{ソ}},\ \boxed{\text{タ}}\right),\ \left(\boxed{\text{チ}},\ \boxed{\text{ツ}}\right)$$

である。ただし，$\boxed{\text{ソ}} < \boxed{\text{チ}}$とする。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{2}$　n を 2 以上の整数とする。赤球が 2 個, 白球が $(2n-2)$ 個入っている袋があり, A と B の 2 人がこの袋から球を 1 個ずつ交互に取り出すゲームを行う。ただし，取り出した球は袋に戻さず，1 回目は A が取り出すものとする。また，2 個目の赤球が取り出された時点でゲームは終了となり，2 個目の赤球を取り出した方を勝ちとする。

(1)　k は $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。

1 個目の赤球を A が取り出し，ちょうど $2k$ 回目に B が勝つ確率は

$$\frac{k}{\boxed{\text{ア}}\,n^2 - n}$$

である。

また, 1 個目の赤球を B が取り出し，ちょうど $(2k-1)$ 回目に A が勝つ確率は

$$\frac{k - \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}\,n^2 - n}$$

である。

(2)　1 個目の赤球を A が取り出し，B が勝つ確率は

$$\frac{n + \boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}\,n - \boxed{\text{カ}}}$$

である。

また，1 個目の赤球を B が取り出し，A が勝つ確率は

$$\frac{n - \boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}\,n - \boxed{\text{ケ}}}$$

である。

(3)　ゲームが終了となるまでに A が球を取り出した回数を X とすると, X の期待値は

$$\frac{\boxed{\text{コ}}\,n^2 + \boxed{\text{サ}}\,n - \boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}\,n - \boxed{\text{ソ}}}$$

である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{3}$ 三角形OABにおいて，OA $=2$，OB $=3$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$ とする。$\angle$AOBの二等分線と辺ABの交点をC，線分OC上の点をDとし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は垂直であるとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b}$$

であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

である。

さらに，3点A，C，Dを通る円と辺OAの交点のうち，Aと異なる方をEとし，線分ADと線分CEの交点をFとする。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{a}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\vec{b}$$

である。

(4) $\cos\angle$EFDの値は

$$\cos\angle\mathrm{EFD}=\frac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

（下　書　き　用　紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{4}$ 方程式 $y = \dfrac{3x^2+1}{4x}$ で定まる曲線を C とすると，曲線 C は2直線

$$x = \boxed{\text{ア}},\quad y = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}x$$

を漸近線にもつ。この曲線 C 上のすべての点が，原点を中心とする一定角の回転移動により，座標軸上に焦点をもつある双曲線上の点に移ることを確認しよう。

曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を原点を中心に角 θ だけ回転させた点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とする。このとき，$x,\ y$ を $X,\ Y,\ \theta$ を用いて表すと

$$x = \boxed{\text{エ}},\quad y = \boxed{\text{オ}} \quad \cdots\cdots(*)$$

となる。ただし，$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ には，次の①～⑧の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと。なお，同じ選択肢を選んでもよいものとする。

① $X\sin\theta + Y\cos\theta$　　② $X\cos\theta + Y\sin\theta$

③ $-X\sin\theta + Y\cos\theta$　　④ $-X\cos\theta + Y\sin\theta$

⑤ $X\sin\theta - Y\cos\theta$　　⑥ $X\cos\theta - Y\sin\theta$

⑦ $-X\sin\theta - Y\cos\theta$　　⑧ $-X\cos\theta - Y\sin\theta$

$(*)$ を曲線 C の方程式に代入して得られる X と Y の関係式を

$$lX^2 + mXY + nY^2 + 1 = 0 \quad (l,\ m,\ n \text{ は } X,\ Y \text{ を含まない式})$$

という形に整理すると

$$m = \boxed{\text{カ}}\sin(2\theta - \alpha)$$

と表せる。ただし，α は

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\quad \sin\alpha = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}},\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たす角とする。そして，$m = 0$ となる θ の値を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で求めると

$$\theta = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\alpha$$

であり，このとき，X と Y の満たす関係式は

$$\boxed{\text{ス}}X^2 - Y^2 = -1$$

となる。

ここで，方程式 $\boxed{\text{ス}}\,x^2 - y^2 = -1$ で表される曲線 C' は双曲線であり，曲線 C' の焦点の座標は

$$\left(0,\ -\frac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right),\ \left(0,\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)$$

である。

以上より，曲線 C 上のすべての点は，原点を中心に角 $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\alpha$ だけ回転させると，y 軸上に焦点をもつ双曲線 C' 上の点に移ることがわかる。

5 関数$f(x)$は$x>-\dfrac{1}{3}$の範囲で定義され，第2次導関数$f''(x)$をもち，関係式

$$f(x)=2x+\int_0^x(4x-7t)f'(t)\,dt \quad \cdots\cdots (*)$$

を満たしている。このような関数$f(x)$を求めよう。

(*) より

$$f(0)=\boxed{\text{ア}}$$

である。

また，(*) の両辺をxで微分して整理すると

$$f'(x)=\boxed{\text{イ}}\int_0^x f'(t)\,dt-\boxed{\text{ウ}}\,xf'(x)+\boxed{\text{エ}} \quad \cdots\cdots (**)$$

となり，これより

$$f'(0)=\boxed{\text{オ}}$$

である。そして，(**) の両辺をxで微分して整理することにより

$$\left(\boxed{\text{カ}}+\boxed{\text{キ}}\,x\right)f''(x)=f'(x)$$

を得る。

よって，$f'(x)$は積分定数Cを用いて

$$\log|f'(x)|=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\log\left|\boxed{\text{コ}}+\boxed{\text{サ}}\,x\right|+C$$

と表されるので，このことを利用して$f(x)$を求めると

$$f(x)=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\left(\boxed{\text{セ}}+\boxed{\text{ソ}}\,x\right)^{\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}}-\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

となる。

（下　書　き　用　紙）