# 平成２３年度　入学者選抜試験問題

## 一般入学試験

## 数　学　(70分)

**I　注意事項**

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　この問題冊子は16ページあります。ただし，出題ページは下記のとおりです。
　　**4，6，8，10，12ページ**

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督員に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，その説明と解答用紙の「記入上の注意」を読み，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**
　**受験番号を記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄**
　**氏名・フリガナを記入**しなさい。

5　試験開始後30分間および試験終了前５分間は退出できません。

6　この表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。**この問題冊子は試験終了後回収します。**

**II　解答上の注意**

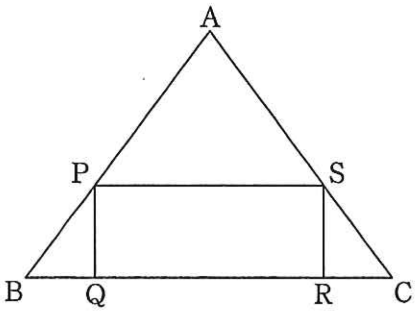
1　**「解答上の注意」が，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。**

| 受　験　番　号 | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |

SKR10L003

（問題は次ページから始まる）

$\boxed{1}$ (1) $\triangle$ABC は AB = AC = 10, BC = 12 の二等辺三角形である。長方形 PQRS を右図のように内接させるとき，PQRS の面積の最大値を求めたい。




BQ = $3x$ （ $\boxed{\text{ア}}$ < $x$ < $\boxed{\text{イ}}$ ）とおけば PQ = $\boxed{\text{ウ}}$ $x$ である。よって，長方形 PQRS の面積は $\boxed{\text{エオカ}}$ $x^2$ + $\boxed{\text{キク}}$ $x$ と表されるので，$x$ = $\boxed{\text{ケ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{コサ}}$ をとる。

(2) 円に内接する四角形 ABCD において，

AB = 4, BC = 5, CD = 7, DA = 10

であるとき，

$$\mathrm{AC} = \sqrt{\boxed{\text{シス}}}$$

である。また，四角形 ABCD の面積は $\boxed{\text{セソ}}$ である。

（下書き用紙）

$\boxed{2}$ (1) 2本の直線

$$mx-y=0 \quad \cdots①,\quad x+my-m-2=0 \quad \cdots②$$

の交点をPとする。

$m$ が実数全体を動くとき，Pの軌跡は

$$円\left(x-\boxed{ア}\right)^2+\left(y-\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\right)^2=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}} \text{から}$$

$$1点\left(\boxed{カ},\ \boxed{キ}\right)\text{を除いたもの}$$

となる。

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，不等式

$$\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta<0$$

を満たす $\theta$ を求めたい。不等式は

$$\sin\boxed{ク}\theta\left(1+\boxed{ケ}\cos 2\theta\right)<0$$

と変形できる。

(i) $\sin\boxed{ク}\theta<0$ かつ $1+\boxed{ケ}\cos 2\theta>0$ のとき

$$\pi<\theta<\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\pi,\quad \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\pi<\theta<2\pi$$

(ii) $\sin\boxed{ク}\theta>0$ かつ $1+\boxed{ケ}\cos 2\theta<0$ のとき

$$\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\pi<\theta<\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\pi$$

となるので，(i)または(ii)から解を得る。

（下書き用紙）

$\boxed{3}$ 1から$n$までの通し番号がついた$n$個の箱と，1から$n$までの通し番号がついた$n$個の球がある。$n$個の箱に1つずつ球を入れる方法の数は$n!$通りだけあるが，このうち箱の番号と球の番号とがすべて異なるような入れ方の総数を$a_n$とする。たとえば，$a_1=0$，$a_2=1$である。

(1) $a_3=\boxed{\text{ア}}$，$a_4=\boxed{\text{イ}}$である。

(2) $a_{n+1}$について考える。$n+1$番の球を1番の箱に入れる場合は，1番の球が$n+1$番の箱に入る場合と入らない場合を考えれば

$$a_{n-\boxed{\text{ウ}}}+a_n \text{通り}$$

だけあることがわかる。$n+1$番の球が他の箱に入る場合も同様なので，

$$a_{n+1}=n(a_{n-\boxed{\text{ウ}}}+a_n) \quad \left(n \geqq \boxed{\text{エ}}\right)$$

となる。

(3) $n \geqq \boxed{\text{エ}}$のとき，$a_n-na_{n-\boxed{\text{ウ}}}=\left(\boxed{\text{オカ}}\right)^n$である。

(4) $n \geqq \boxed{\text{エ}}$のとき，$\dfrac{a_n}{n!}=\displaystyle\sum_{k=\boxed{\text{キ}}}^{n}\dfrac{\left(\boxed{\text{クケ}}\right)^k}{k!}$である。

（下書き用紙）

$\boxed{4}$ 関数$f(x)$を$f(x)=\sqrt{1+x}$とし，数列$\{a_n\}$を

$$a_1=2,\ a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。

(1) 方程式$x=f(x)$の解を$\alpha$とするとき，

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{ア}}+\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(2) 数列$\{a_n\}$のすべての項は，$\alpha \leqq a_n \leqq 2$を満たすことを数学的帰納法により証明する。

$n=1$のときは成り立つ。

$n=k$のとき，$\alpha \leqq a_k \leqq 2$が成り立つことを仮定する。

$$f'(x)=\frac{1}{\boxed{\text{エ}}\sqrt{1+x}}>0$$

より$f(x)$は増加するので

$$f(\alpha) \leqq f(a_k) \leqq f\left(\boxed{\text{エ}}\right)$$

となる。

$$\therefore\quad \alpha \leqq a_{k+1} \leqq \sqrt{\boxed{\text{オ}}}<2$$

したがって，$n=k+1$のときも成り立つ。

(3) 関数$f(x)$について，$\alpha$と$a_n$の間で平均値の定理を用いると，

$$\frac{f(a_n)-f(\alpha)}{a_n-\alpha}=\frac{1}{\boxed{\text{カ}}\sqrt{1+c_n}}$$

を満たす$c_n$が$\alpha$と$a_n$の間に存在する。

(4) $c_n \geqq \alpha$より$\dfrac{1}{\boxed{\text{カ}}\sqrt{1+c_n}} \leqq \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}-\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ $(=r$とおく$)$

となるので，$|a_{n+1}-\alpha| \leqq r|a_n-\alpha|$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つ。

(5) (4)より，$0 \leqq |a_n-\alpha| \leqq r^{n-\boxed{\text{コ}}}|a_1-\alpha|$

となるので，$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$が示される。

（下書き用紙）

$\boxed{5}$ 極方程式 $r=1+\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線 $C$ について考える。

(1) $C$ 上の点のうち，$x$ 座標が最小となる点は

$$\theta=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$$

により与えられる。また，$y$ 座標が最大となる点は

$$\theta=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$$

により与えられる。

(2) $C$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対し，定積分

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

を計算すると $\boxed{\quad\text{オ}\quad}$ である。

（下書き用紙）

## 解答上の注意

解答はすべて解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がない限り，数字（0～9），符号（−，±），自然対数の底（$e$）のいずれかが入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つが，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。
なお，解答用紙に5つある解答欄の左肩の数字は，それぞれ大問の番号を表します。

例1　$\boxed{\text{アイウ}}$ に −８３ と答えたいとき。

| 1 | 解答欄 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | − | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $e$ |
| ア | ● | ⊕ | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ⓔ |
| イ | ⊖ | ⊕ | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ● | ⑨ | ⓔ |
| ウ | ⊖ | ⊕ | ⓪ | ① | ② | ● | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ⓔ |

分数形で解答する場合は，既約分数で答えなさい。符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例2　$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

| 1 | 解答欄 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | − | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $e$ |
| エ | ● | ⊕ | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ⓔ |
| オ | ⊖ | ⊕ | ⓪ | ① | ② | ③ | ● | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ⓔ |
| カ | ⊖ | ⊕ | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ● | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ⓔ |