平成26年度　日本医科大学入学試験問題

〔 数　学 〕

受験番号	

注　意　事　項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙配布後，監督者の指示に従い，配布枚数の確認を行うこと。
   （表紙を除き，問題冊子6ページ，うち3ページは計算用紙，解答用紙3枚）
   落丁，乱丁，印刷の不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答時間は11時25分から12時55分までの90分。
   解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. 机上には，受験票と筆記用具および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。
5. 筆記用具は鉛筆，シャープペンシル，消しゴムのみとする。
   （コンパス，定規等は使用できない。）
6. 止むを得ず下敷を使用する場合は，監督者の許可を得ること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白および計算用紙は草稿や計算に自由に用いてよい。
9. 耳栓の使用はできない。
10. 携帯電話等の電源は必ず切り，鞄の中にしまうこと。
11. 質問，用便，中途退室など用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
12. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時間まで別室で待機を命じる。
13. 退室時は，試験問題および解答用紙を裏返しにすること。

[I] 次の各問いの答えのみを解答用紙に記せ。

問 1 トランプのスペードとハートのカードが合わせて 9 枚ある。よく切って 2 枚を同時に取り出す。スペードの枚数を $n\ (0 \leqq n \leqq 9)$ とするとき, 以下の各問いに答えよ。

(1) ハートの出ない確率を n の式で表せ。

(2) ハートとスペードがともに 1 枚ずつ出る確率を n の式で表せ。

(3) ハートの出ない確率が 0.3 以上 0.6 未満で, ハートとスペードがともに 1 枚ずつ出る確率が 0.4 未満であるとき, n の値を求めよ。

問 2 四面体 OABC において

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \sqrt{3}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 1$$

であるとき, 以下の各問いに答えよ。

(1) 辺 AB, BC の長さを求めよ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

問 3 a を実数とする。x の 2 次方程式 $(a^2+1)x^2 - 2(a+1)x + a = 0$ の 2 つの解が $\sin\theta$, $\cos\theta$ (ただし $0 \leqq \theta \leqq \pi$) であるとき, a と θ の値の組 (a, θ) をすべて求めよ。

計 算 用 紙

[II] $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ には, $\geqq$ または $\leqq$ が入る。この各々の不等式について, $\geqq$ または $\leqq$ を決定し, その証明を与えよ。問 2, 問 3 については等号成立条件は述べなくてよい。なお以下に現れる全ての文字, すなわち

$$x,\ k,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ a,\ b,\ c \qquad \text{および} \qquad s_n,\ \alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n \quad (n = 1, 2, 3)$$

は正の実数をとるものとする。また対数の底は e とする。

問 1 k を定数とするとき, 全ての x について

$$\log x - \log k \ \boxed{1}\ \frac{1}{k}(x - k)$$

が成り立つ。

問 2 k を $\alpha a + \beta b + \gamma c$ とおき, 問 1 の不等式を利用することにより, 次を得る。ただし, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ とする。

$$\alpha \log a + \beta \log b + \gamma \log c \ \boxed{2}\ \log(\alpha a + \beta b + \gamma c).$$

問 3 s_1, s_2, s_3 を次で定める:

$$\begin{cases} s_1 = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c \\ s_2 = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c \\ s_3 = \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c \end{cases}$$

ただし,

$$\sum_{n=1}^{3} \alpha_n = \sum_{n=1}^{3} \beta_n = \sum_{n=1}^{3} \gamma_n = 1, \qquad \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1 \ (n = 1, 2, 3)$$

とする。このとき

$$s_1 s_2 s_3 \ \boxed{3}\ abc$$

が成り立つ。

計 算 用 紙

[III] e を自然対数の底とするとき, 定積分 $I=\int_0^2 e^{-x^2}dx$ の値に関する以下の各問いに答えよ。

問 1 次の２つの定積分の値を, I を用いて表し, 計算過程を記せ。

(1) $\int_0^2 x^2e^{-x^2}dx$ (2) $\int_0^2 x^4e^{-x^2}dx$

問 2 閉区間 $a \leqq x \leqq b$ において, 関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は 微分可能, 第２次導関数 $f''(x)$ は連続であるとする。このとき不等式

$$\int_a^b \left(\{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 + \{f''(x)\}^2\right)dx + \left[\{f(x)+f'(x)\}^2\right]_a^b \geqq 0$$

が成り立つことを示せ (等号成立条件は述べなくてよい)。ただし, 関数 $g(x)$ に対して $\left[g(x)\right]_a^b$ は $g(b)-g(a)$ を表す。

問 3 不等式

$$I \geqq \frac{4}{5}+\frac{6}{5e^4}$$

が成り立つことを示せ。

計 算 用 紙