

平成 25 年度 日本医科大学入学試験問題

[数 学]

受験番号	
------	--

注 意 事 項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙配布後、監督者の指示に従い、配布枚数の確認を行うこと。
(表紙を除き、問題冊子 5 ページ、うち 2 ページは計算用紙、解答用紙 3 枚)
落丁、乱丁、印刷の不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答時間は 11 時 25 分から 12 時 55 分までの 90 分。
解答が終わっても、または試験を放棄する場合でも、試験終了までは退場できない。
4. 机上には、受験票と筆記用具および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。
5. 筆記用具は鉛筆、シャープペンシル、消しゴムのみとする。
(コンパス、定規等は使用できない。)
6. 止むを得ず下敷を使用する場合は、監督者の許可を得ること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白および計算用紙は草稿や計算に自由に用いてよい。
9. 耳栓の使用はできない。
10. 携帯電話等の電源は必ず切り、鞆の中にしまうこと。
11. 質問、用便、中途退室など用件のある場合は、無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
12. 受験中不正行為があった場合は、試験の一切を無効とし、試験終了時間まで別室で待機を命じる。
13. 退室時は、試験問題および解答用紙を裏返しにすること。

[I] 2つの行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ a^2-2a-4 & 2a-6 \end{pmatrix}$ に対して,
以下の各問いに答えよ。解答欄には答えのみを記せ。

問1 行列 $A - kE$ が逆行列をもたないような定数 k の値を求めよ。

ただし E は2次の単位行列を表す。

問2 問1で求めた k の値を小さい順に α, β とするとき, $\alpha P + \beta Q = A$, $P + Q = E$ を満たす行列 P, Q を求めよ。

問3 行列の積 P^2, Q^2, PQ, QP を求めよ。

問4 行列 A の n 乗 A^n ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ。

問5 $a > 0$ として, 行列 C を $C = A + B$ と定めるとき, 行列 $C - kE$ が逆行列をもたないような定数 k の値がただ1つしかないという。このような定数 k および a の値を求めよ。

問6 問5で求めた k を用いて行列 N を $N = C - kE$ と定めるとき, N^2 を求めよ。

問7 行列 C の n 乗 C^n ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ。

[II] 自然数 m, n は, $2 \leq m < n$ を満たすとする。

問 1 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n+1-m}{m(n+1)} < \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} < \frac{n+1-m}{n(m-1)}$$

問 2 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{3}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) \leq 2$$

問 3 問 2 の不等式をより精密にした, 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{29}{18} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) \leq \frac{61}{36}$$

[III] 次の各問いに答えよ。

問1 $x \geq 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ として

$$I_k(x) = \int \frac{(\log x)^k}{x^2} dx$$

とおくとき, $I_0(x)$ を求め, $I_{k+1}(x)$ を $I_k(x)$ を用いて表せ。また $I_4(x)$ を求めよ。

問2 $x > 0$ で不等式 $\log x \leq \frac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}$ が成り立つことを証明せよ。

問3 関数 $f(x) = \frac{(\log x)^2}{x}$ に関する以下の各問いに答えよ。

(a) $y = f(x)$ ($x \geq 1$) の極値, 極限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ を調べ, 増減表を作り, グラフの概形を描け。解答欄には増減表とグラフの概形のみを記せ。

(b) $n > 1$ として, $y = f(x)$ と2直線 $x = n$, $x = n^2$ および x 軸で囲まれる部分 D_n の面積 S_n を求めよ。

(c) D_n を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V_n を求めよ。

(d) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nV_n}{(\log n)S_n}$ の値を求めよ。