平成21年度　日本医科大学入学試験問題

〔 数　学 〕

受験番号	

注 意 事 項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙配布後，監督者の指示に従い，配布枚数の確認を行うこと。
   （問題冊子５ページ，うち２ページは計算用紙，解答用紙３枚）
   落丁，乱丁，印刷の不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答時間は11時25分から12時55分までの90分。
   なお，試験開始後40分経過後でなければ退室は認めない。
4. 机上には，受験票と筆記用具および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。
5. 筆記用具は鉛筆，シャープペンシル，消しゴムのみとする。
   （コンパス，定規等は使用できない。）
6. 止むを得ず下敷を使用する場合は，監督者の許可を得ること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白および計算用紙は草稿や計算に自由に用いてよい。
9. 耳栓の使用はできない。
10. 携帯電話等の電源は必ず切り、鞄の中にしまうこと。
11. 質問，用便，中途退室など用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
12. 受験中不正行為があった場合は，退室を命じ試験の一切を無効とする。
13. 退室時は，試験問題および解答用紙を裏返しにすること。

[I] 次の文章の空欄に適する数を解答欄に記せ。ただし，分数は既約分数の形で答えよ。

(1) 「2^n を 7 で割ると 1 余る」という性質をもつ最小の自然数 n は $\boxed{\text{ア}}$ である。したがって，2^{12} を 7 で割った余りは $\boxed{\text{イ}}$ ，2^{2009} を 7 で割った余りは $\boxed{\text{ウ}}$ ，$2^{2^{2009}}$ を 7 で割った余りは $\boxed{\text{エ}}$ である。ただし，a^{b^c} は「a の b^c 乗」を意味するものとする。

(2) A と B が次のようなゲームをする。A はサイコロを 2 回投げて出た目の最大値 a を得点とし，B はサイコロを 1 回投げて出た目 b を得点とし，得点の大きい方を勝ち，同点なら引き分けとする。このとき，$a \leqq 5$ となる確率は $\boxed{\text{オ}}$ ，$a \leqq 4$ となる確率は $\boxed{\text{カ}}$ ，B が A に勝つ確率は $\boxed{\text{キ}}$ ，引き分けとなる確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(3) O を原点とする数直線上に，点 $P_n(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を次のようにとる。ただし，x_n は点 P_n の座標を表す。

　$x_0 = 1$ とする。そして，n が偶数なら，線分 OP_n の中点を P_{n+1} とし，n が奇数なら，線分 P_nP_0 を $1:2$ に内分する点を P_{n+1} とする。

このとき，$m = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，

$$x_{2m+1} = \boxed{\text{ケ}}\, x_{2m}$$
$$x_{2m+2} = \boxed{\text{コ}}\, x_{2m+1} + \boxed{\text{サ}}$$

が成り立つ。したがって，

$$x_{2m+2} = \boxed{\text{シ}}\, x_{2m} + \boxed{\text{ス}}$$

となり，

$$\lim_{m\to\infty} x_{2m} = \boxed{\text{セ}}$$
$$\lim_{m\to\infty} x_{2m+1} = \boxed{\text{ソ}}$$

を得る。

[II] 座標空間において，点 P は，円 $C_1:\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=1,\ z=0\}$ 上の点で，原点 O を中心として，点 $(1,0,0)$ から C_1 上を角 θ だけ回ったところにある。ただし，この回転は，z 軸の正の方向からながめたときの反時計回りを正の方向とする。また点 Q は，円 $C_2:\{(x,y,z)\mid y^2+z^2=\sin^2\alpha,\ x=0\}$ 上の点で，O を中心として，点 $(0,|\sin\alpha|,0)$ から C_2 上を角 $\theta+\alpha$ だけ回ったところにある。ただし，この回転は，x 軸の正の方向からながめたときの反時計回りを正の方向とし，α は定数であり，$\sin\alpha=0$ のときは点 Q は原点 O であるとする。点 P と点 Q の間の距離を ℓ とする。

(1) 点 P の座標と点 Q の座標を，α, θ を使って表せ。(結果のみを記せ。)

(2) ℓ^2 を，α, θ を使って表せ。ただし，θ を一度だけ使う式にすること。

(3) α を定数として，θ が実数全体を動くとき，ℓ^2 の最小値を m，最大値を M とする。m と M を，α を使って表せ。(結果のみを記せ。)

(4) θ が実数全体を動くとき，

(a) つねに $1\leqq\ell\leqq\sqrt{3}$ となるような α の条件は何か。$\sin\alpha$ の値の範囲として答えよ。

(b) $\ell\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ を満たす θ が少なくともひとつ存在するような α の条件は何か。$\sin\alpha$ の値の範囲として答えよ。

(5) (3) で考えた m が 0 となるような α に対し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t}\ell\,d\theta$ を求めよ。

(注) xy 平面に対する z 軸の正の方向は，x 軸の正の方向からながめたときの反時計回りに，x 軸を中心軸として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転すると，y 軸の正の部分が z 軸の正の部分に移るようにとるものとする。

[III] xy 平面において，0 でない実数 a に対し，原点 O を焦点，直線 $y=a$ を準線とする放物線を C_a とし，C_a の $x \geqq 0$ を満たす部分を D_a とする。また，$a, b>0$ に対し，2 曲線 D_a，D_{-b} の交点を $\mathrm{P}_{a,-b}$ とする。

(1) $\mathrm{P}_{a,-b}$ の座標を求めよ。(結果のみを記せ。)

(2) $a, b>0$ に対し，2 曲線 D_a，D_{-b} および y 軸で囲まれる領域の面積を求めよ。

(3) 条件

$$0<r<a \quad かつ \quad 0<r<b$$

を満たす a, b, r に対し，4 曲線 D_{a+r}，D_{a-r}，$D_{-(b+r)}$，$D_{-(b-r)}$ で囲まれる領域の面積を $S(a, b, r)$ とするとき，$a, b>0$ に対して定義される関数

$$f(a, b)=\lim_{r \to +0} \frac{1}{r^2} S(a, b, r)$$

を求めよ。

(4) $a, b>0$ が条件 $f(a, b)<4$ を満たして動くとき，点 $\mathrm{P}_{a,-b}$ の存在範囲を求め xy 平面上に図示せよ。