平成 20 年度　日本医科大学入学試験問題

〔 数　学 〕

受験番号	

注 意 事 項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙配布後，監督者の指示に従い，配布枚数の確認を行うこと。
　(問題冊子 6 ページ，うち 2 ページは計算用紙，解答用紙 3 枚)
　落丁，乱丁，印刷の不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答時間は 11 時 25 分から 12 時 55 分までの 90 分。
　なお，試験開始後 40 分経過後でなければ退室は認めない。
4. 机上には，受験票と筆記用具および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。
5. 筆記用具は鉛筆，シャープペンシル，消しゴムのみとする。
　（コンパス，定規等は使用できない。）
6. 止むを得ず下敷を使用する場合は，監督者の許可を得ること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白および計算用紙は草稿や計算に自由に用いてよい。
9. 耳栓の使用はできない。
10. 携帯電話等の電源は必ず切り、鞄の中にしまうこと。
11. 質問，用便，中途退室など用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
12. 受験中不正行為があった場合は，退室を命じ試験の一切を無効とする。
13. 退室時は，試験問題および解答用紙を裏返しにすること。

［I］ 次の文章の空欄に適する数を解答欄に記せ。ただし，分数は既約分数の形で答えよ。

正の整数 n に対し，n 以下の正の整数のうち，3 で割り切れるものの個数を a_n，3 または 7 で割り切れるものの個数を b_n，3 または 7 で割り切れるものの総和を S_n とする。たとえば，$a_{100} = \boxed{\text{ア}}$，$b_{100} = \boxed{\text{イ}}$，$S_{100} = \boxed{\text{ウ}}$ である。n が限りなく大きくなるとき，$\dfrac{a_n}{n}$ は $\boxed{\text{エ}}$ に収束し，$\dfrac{b_n}{n}$ は $\boxed{\text{オ}}$ に収束する。また，n が限りなく大きくなるとき，$\dfrac{S_n}{n^c}$ が正の数に収束するような定数 c の値は $\boxed{\text{カ}}$ であり，c をこのように定めると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^c} = \boxed{\text{キ}}$ となる。

[II] 関数 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$ とその導関数 $f'(x)$ について，次の設問に答えよ。

(1) 方程式 $f'(x)=0$ を解け。

(2) $f(x)$ を $f'(x)$ で割った商と余りを求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，方程式 $f(x)=a$ が 3 個の異なる実数解をもつような定数 a の範囲を求めよ。

[III] O を原点とする xy 平面において，次のような移動を考える。

- $x, y \neq 0$ なる点 $\mathrm{P}(x, y)$ を，点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$ に移す。この移動を f とする。
- 原点ではない点 P を，半直線 OP 上の点で $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 1$ を満たす点 R に移す。この移動を g とする。

(1) 点 $\mathrm{P}(2, 3)$ を f で移動した点 Q の座標，および g で移動した点 R の座標を求めよ。結果のみを記せ。

(2) 点 P を f や g で移動したとき，動かない点を不動点という。f, g それぞれについて不動点全体のなす集合を求めよ。結果のみを記せ。

(3) 点 P が直線 $x + 2y = 1$（ただし座標軸上の点は除く）の上を動くとき，点 P を f で移動した点 Q の軌跡を求め，図示せよ。

(4) 点 P が直線 $x + 2y = 1$ の上を動くとき，点 P を g で移動した点 R の軌跡を求め，図示せよ。

（注意） (3),(4) の図示において，もし漸近線があればそれも描き入れよ。

[IV] Oを原点とする xy 平面上の半円

$$A: \quad x^2+y^2=1 \text{ かつ } y \geqq 0$$

の上に異なる2点 P, Q をとり，A と直線 PQ で囲まれる領域を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V とする。また，PQ の中点を M とし，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と x 軸の正方向のなす角を α，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を β とする。ただし，直線PQが 2点 $(-1,0),(1,0)$ を結ぶ直線のとき，$\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) 実数の定数 a, b に対し，次の等式が成立することを示せ。

$$\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3$$

(2) 直線PQの傾きを α を用いて表せ。

(3) V を $\sin\alpha$, $\sin\beta$ を用いて表せ。

(4) β を固定して2点 P, Q を動かすときの V の最大値 V_1 と最小値 V_2 の差 $W=V_1-V_2$ を β の関数と考え，W を最大にする β を β_0 とする。このとき $\sin\beta_0$ の値を求めよ。