

平成 29 年度 入学試験問題

数 学 問 題 用 紙 (後期)

試験時間	90分
問題用紙	1 ~ 12頁

注 意 事 項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. 携帯電話等の電子機器類は電源を必ず切り，鞆の中にしまうこと。
5. 机上には，受験票と筆記用具（鉛筆，シャープペンシル，消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓，コンパス，定規等は使用できない。）
6. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白は自由に用いてよい。
9. 質問，トイレ，体調不良等で用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は，問題用紙および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後，解答用紙は裏返し，問題用紙は持ち帰ること。

受験番号	
------	--

氏 名	
-----	--

[I] 次の各問いの に最も適する語句を下の ① ~ ④ から選び、その番号のみを解答用紙に記せ。

問1 a, b, c はすべて実数とする。 $a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ であることは、すべての実数 x に対して $ax^2 + bx + c > 0$ が成り立つための 。

問2 $\triangle ABC$ において辺 AB, BC, CA の延長上の点をそれぞれ P, Q, R とするとき、

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

が成り立つことは、3点 P, Q, R が同一直線上にあるための 。

問3 p, q を整数とすると、 x の2次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が少なくとも1つの整数解をもつことは、 p, q のうち少なくとも1つが偶数であるための 。

問4 a を実数の定数とする。実数 x に対する関数 $f(x)$ に関して、 xy 平面における曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ における接線 l が存在しないか、または l が y 軸に平行であることは、 $f(x)$ が $x = a$ で連続でないための 。

- ① 必要十分条件である
- ② 必要条件ではあるが十分条件ではない
- ③ 十分条件ではあるが必要条件ではない
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

[II] a, b を実数, r を正の実数として, xy 平面上の次の 2 つの集合を考える。

$$X = \{(x, y) \mid 4x - 3y \leq 40, 3x + 4y \geq -20, 7x - 24y \geq -80\}$$

$$Y = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}$$

このとき以下の各問いの答えのみを解答用紙に記せ。

問 1 $X \subset Y$ が成り立つような r の最小値を求めよ。またこのときの a, b の値をそれぞれ求めよ。

問 2 $Y \subset X$ が成り立つような r の最大値を求めよ。またこのときの a, b の値をそれぞれ求めよ。

[III] 四面体 $OABC$ において、辺 OA を $1:3$ に内分する点を P 、辺 AB の中点を Q 、線分 QC を $2:1$ に内分する点を R 、線分 PR を $3:2$ に内分する点を S 、直線 OS が平面 ABC と交わる点を T とする。このとき $\triangle BCT$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の何倍か。

[IV] 次の4つの数 a, b, c, d に関する以下の各問いに答えよ。但し、対数の底は $e = 2.71828\cdots$ とする。

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x, \quad b = 3^{-5}, \quad c = 4^{-4}, \quad d = e^{\frac{1}{2}(\log a + \log b)}$$

問1 a の値を求めよ。

問2 a, b, c, d を小さい順に並べよ。

問3 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a^x + b^x + c^x + d^x)^{\frac{1}{x}}$$

[V] 以下の各問いに答えよ。

問 1 関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は微分可能, 第 2 次導関数 $f''(x)$ は連続かつ $f''(x) > 0$ を満たすとする。このとき, 任意の実数 x_1, x_2 および $a_1 + a_2 = 1$ を満たす 0 以上の任意の実数 a_1, a_2 に対して, 不等式

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) \leq a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$$

が成り立つことを, t の関数 $F(t) = a_1f(t) + a_2f(x_2) - f(a_1t + a_2x_2)$ を考えることにより証明せよ。

問 2 問 1 と同じ条件を満たす関数 $f(x)$ に対して, 番号 $n (\geq 2)$ に関する帰納法により, 不等式

$$f\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n a_j f(x_j)$$

が成り立つことを証明せよ。ただし, x_1, x_2, \dots, x_n は任意の実数, また a_1, a_2, \dots, a_n は $\sum_{j=1}^n a_j = 1$ を満たす 0 以上の任意の実数とする。

問 3 $n (\geq 2)$ 個の実数 p_1, p_2, \dots, p_n はすべて 1 より大とし, さらに $\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} = 1$ を満たすとする。

問 2 の不等式において, $f(x) = e^x, a_j = \frac{1}{p_j} (j = 1, 2, \dots, n)$ と置いて得られる不等式を求めよ (答えのみでよい)。

問4 各 p_j ($j = 1, 2, \dots, n$) は問3 で与えられたものとし, また各 A_j ($j = 1, 2, \dots, n$) は $n (\geq 2)$ 個の 0 以上の実数とする。 $n (\geq 2)$ に対して不等式

$$\prod_{j=1}^n A_j \leq \sum_{j=1}^n \frac{A_j^{p_j}}{p_j}$$

が成り立つことを, 問3 で得られた不等式において $x_j = p_j \log A_j$ と置くことにより証明せよ。

ここに $\prod_{j=1}^n A_j$ は次で定義される:

$$\prod_{j=1}^n A_j = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

問5 関数 $g(x)$ を, 閉区間 $[a, b]$ (ただし $a < b$) で定義された恒等的に 0 でない連続関数とする。問3 の各 p_j ($j = 1, 2, \dots, n$) に対し, 問4 の不等式で

$$A_j = \frac{|g_j(x)|}{\left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}}} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

と置くことにより, $n (\geq 2)$ に対して不等式

$$\int_a^b \left(\prod_{j=1}^n |g_j(x)|\right) dx \leq \prod_{j=1}^n \left\{ \left(\int_a^b |g_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}} \right\}$$

が成り立つことを証明せよ。