日本医科大学

平成３１年度　入学試験問題

数　学　問　題　用　紙（前期）

試験時間	９０分
問題用紙	１～８頁

注　意　事　項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. 携帯電話等の電子機器類は電源を必ず切り，鞄の中にしまうこと。
5. 机上には，受験票と筆記用具（鉛筆，シャープペンシル，消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓，コンパス，定規等は使用できない。）
6. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白は自由に用いてよい。
9. 質問，トイレ，体調不良等で用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は，問題用紙および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後，解答用紙は裏返し，問題用紙は持ち帰ること。

受験番号		氏　名	

[I] a を $a \neq 0, -1$ を満たす実数とする。O を原点とする xy 平面上において次の 2 つの曲線を考える：

$$C_1 : x^2 - y^2 = 1, \qquad C_2 : y = ax^2 - \frac{3}{2a+2}$$

以下の各問いの答えのみを解答欄に記入せよ。

問 1 $a = 1$ のとき，C_1 と C_2 の共有点の座標をすべて求めよ。

問 2 C_1 と C_2 が相異なる 4 点で交わるための a に対する必要十分条件を求めよ。

問 3 C_1 と C_2 が相異なる 4 点で交わるとき，それら 4 点すべてを通る円の中心の座標を a を用いて表せ。また，その円の半径を r とするとき，以下の空欄に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。

$$r = \sqrt{\frac{-a^3 - a^2 + \boxed{\text{ア}}\,a + \boxed{\text{イ}}}{a^{\boxed{\text{ウ}}}(a + \boxed{\text{エ}})}}$$

（計 算 用 紙）

[II] 空間において1点Oをとり, 相異なる4点 P, A, B, C を頂点とする四面体 PABC について考える。四面体 PABC は点Oを中心とする半径が1の球に内接しており，三角形 ABC は1辺の長さが l の正三角形であると仮定する。

問1 l の取り得る値の範囲を答えよ。答えのみでよい。

問2 $s=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $t=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおき，点Pから三角形 ABC を含む平面に垂線 PH を下ろす。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を l, s, t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の1次結合で表せ。

問3 問2において l を固定し，点Pが $2s-t=l^2$ を満たしながら点Oを中心とする半径1の球面上を動くとき，四面体 PABC の体積の最大値 $V(l)$ を求めよ。

（計　算　用　紙）

[III] $f(x)=\log(1+x^2)\ (x>0)$ とする。また，実数 a, h は

$$0<a<1, \qquad 0<h<1, \qquad 0<a+h<1$$

を満たすとする。以下の各問いに答えよ。

問1　k を正の実数とする。このとき，以下の不等式が成り立つことを示せ。

$$x-\frac{x^2}{2} \leqq \log(1+x) \leqq x-\frac{1}{k+1}\frac{x^2}{2} \qquad (0 \leqq x \leqq k)$$

問2　各 a, h に対して，以下の等式を満たす $c\ (a<c<a+h)$ がただ1つ存在することを示せ。

$$f(a+h)=f(a)+f'(c)h$$

また，d を以下のように定めたとき，c を d を用いて表せ。

$$d=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

問3　問2において a を固定し，c を h の関数と考えて $c(h)$ と書くことにする。また，$\theta(h)$ を以下のように定める。

$$\theta(h)=\frac{c(h)-a}{h}$$

このとき，極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0+0}\theta(h)$ を求めよ。ただし，記号 $\displaystyle\lim_{h\to 0+0}$ は $h>0$ の範囲で h を 0 に限りなく近づけたときの極限を意味する。

（計 算 用 紙）

[IV] 関数 $f(x)$ は2回微分可能で，その2次までの導関数 $f'(x)$, $f''(x)$ はいずれも連続とし，すべての実数 x に対して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする。xy 平面上の曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t, f(t))$ における法線上に点 $\mathrm{Q}(a, b)$ を $\mathrm{PQ} = 1$, $b < f(t)$ を満たすようにとるとき，以下の各問いに答えよ。

問1 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を求めよ。答えのみでよい。

問2 a, b を t の式で表せ。答えのみでよい。

問3 問2の a, b をそれぞれ $a(t)$, $b(t)$ と表すとき，$b'(t) = f'(t)a'(t)$ が成り立つことを示せ。

問4 T_1, T_2 は $T_1 < T_2$ を満たす実数とする。t が T_1 から T_2 まで変化するときに，2点 P, Q が描く曲線の長さをそれぞれ $L_{\mathrm{P}}(T_1, T_2)$, $L_{\mathrm{Q}}(T_1, T_2)$ で表す。$L_{\mathrm{Q}}(T_1, T_2)$ と $L_{\mathrm{P}}(T_1, T_2)$ の差を $\Delta L(T_1, T_2)$ とする：

$$\Delta L(T_1, T_2) = L_{\mathrm{Q}}(T_1, T_2) - L_{\mathrm{P}}(T_1, T_2)$$

このとき次が成り立つことを示せ。

$$\Delta L(T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{f''(t)}{1 + \{f'(t)\}^2} dt$$

問5 問4までの結果を踏まえて，関数 $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ に対して，$\Delta L(T_1, T_2)$ において同時に $T_1 \to -\infty$, $T_2 \to +\infty$ としたときの極限値

$$\lim_{T_1 \to -\infty,\, T_2 \to +\infty} \Delta L(T_1, T_2)$$

を求めよ。

（計 算 用 紙）