

平成 26 (2014) 年度

慶應義塾大学入学試験問題

医 学 部

数 学

注意事項

1. 受験番号と氏名は解答用紙の所定の記入欄にそれぞれ記入してください。
2. 受験番号は所定欄の枠の中に 1 字 1 字記入してください。
3. 解答は、必ず解答用紙の所定の欄に記入してください。
4. この問題冊子の余白を計算および下書きに用いてください。
5. この問題冊子の総ページ数は12ページです。試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているかどうか確認してください。ページの脱落や重複があったら直ちに監督者に申し出てください。
6. この問題冊子は、試験終了後に持ち帰ってください。

— 下書き計算用 —

— 下書き計算用 —

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

- (1) 1 から 13 までの整数が 1 つずつ書かれた 13 枚のカードの中から 3 枚を選ぶとき、偶数が書かれたカードが 2 枚以上含まれる選び方は 通りであり、11 以上の数が書かれたカードが少なくとも 1 枚含まれる選び方は 通りである。

- (2) $\alpha = 2 + \sqrt{5}$ とするとき、 α を解とし、整数を係数とする 2 次方程式 $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ を求めると $a_1 =$, $b_1 =$ である。また自然数 n に対して、 α^n を解とし、整数を係数とする 2 次方程式を $x^2 + a_nx + b_n = 0$ とすると、 $b_n =$ であり、 $a_n^2 + a_{2n} =$ である。

- (3) 実数 m に対して

$$A(m) = \int_0^1 x(e^x - m)^2 dx$$

とおくと、関数 $A(m)$ は $m =$ のとき最小値 をとる。

— 下書き計算用 —

[II]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

数直線上の座標 1, 2, 3 で表される位置に置かれた点に対する次の操作 T を考える。

操作 T

- (a) 点が 1 または 2 の位置に置かれている場合は確率 $\frac{3}{4}$ でそのままにしておき、確率 $\frac{1}{4}$ で正の方向へ 1 だけ動かす。
- (b) 点が 3 の位置に置かれている場合は確率 $\frac{3}{4}$ でそのままにしておき、確率 $\frac{1}{4}$ で負の方向へ 1 だけ動かす。

以下, n を自然数とする。

- (1) 1 の位置に置かれている点 A に対し, 操作 T を n 回繰り返し行った時点で, 点 A が 1 の位置に置かれている確率を p_n , 2 の位置に置かれている確率を q_n とすると, $p_n = \boxed{\text{(あ)}}$, $q_n = \boxed{\text{(い)}}$ である。
- (2) 2 の位置に置かれている点 B に対し, 操作 T を n 回繰り返し行った時点で, 点 B が 2 の位置に置かれている確率を q'_n とすると $q'_n = \boxed{\text{(う)}}$ である。
- (3) 2 点 C, D がともに 1 の位置に置かれているとする。はじめに K 君が点 C に対し操作 T を繰り返し行おうとし, 点 C が 1 の位置を離れた次の回からは O 君が加わって, K 君が点 C に対し操作 T を繰り返し行おうのと同時に, K 君とは独立に, O 君が点 D に対し操作 T を繰り返し行おうとする。
- (3-1) K 君が点 C に対し操作 T を n 回繰り返し行った時点で, 2 点 C, D がともに 2 の位置に置かれている確率を r_n とすると $r_1 = 0$, $r_2 = \boxed{\text{(え)}}$ であり, 一般に $n \geq 2$ に対して $r_n = \boxed{\text{(お)}}$ である。
- (3-2) K 君が点 C に対し操作 T を n 回繰り返し行った時点で, 2 点 C, D がどちらも 2 の位置に置かれていない確率を s_n とすると $s_1 = \boxed{\text{(か)}}$ である。また一般に $n \geq 2$ に対して $s_n - r_n = \boxed{\text{(き)}}$ である。

— 下書き計算用 —

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な式を入れて文章を完成させなさい。また設問(3)(ii)に答えなさい。

放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ を C で表す。 C 上にない点 $P(X, Y)$ (ただし $Y < \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}$) から C に引いた 2 本の接線のうち、接点の x 座標が小さい方を l_1 とし、大きい方を l_2 とする。また l_1, l_2 と C との接点をそれぞれ Q_1, Q_2 とする。

(1) 接線 l_1, l_2 の傾き m_1, m_2 はそれぞれ $m_1 = \boxed{\text{(あ)}}$, $m_2 = \boxed{\text{(い)}}$ である。

(2) Q_1, Q_2 における C の法線をそれぞれ L_1, L_2 とするとき、 L_1 と L_2 の交点 R の座標を X, Y を用いた式で表すと

$$\left(\boxed{\text{(う)}}, \boxed{\text{(え)}} \right)$$

である。

(3) $\angle Q_1PQ_2$ が一定値 α (ただし $0 < \alpha < \pi$) となるような点 $P(X, Y)$ の軌跡を $S(\alpha)$ で表す。

(i) $S\left(\frac{\pi}{2}\right)$ の方程式は $\boxed{\text{(お)}}$ である。

(ii) $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ のときに $S(\alpha)$ を求めなさい。

(4) 点 $P(X, Y)$ が $S\left(\frac{\pi}{2}\right)$ の上を動くとき、点 R が描く軌跡の方程式は $\boxed{\text{(か)}}$ である。

— 下書き計算用 —

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

三角形 ABC において $AB = AC = 1$, $\angle BAC = 2\theta$ とする。

- (1) 三角形 ABC の内接円 C_1 の半径を $R_1(\theta)$ とする。 $R_1(\theta)$ を θ の式で表すと $R_1(\theta) =$ である。また θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で変化させるときに $R_1(\theta)$ が最大値をとるような θ の値を θ_1 とすると

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin^k \theta_1 = \text{ }$$

が成り立つ。

- (2) 三角形 ABC の内側に次のように円 $C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ を作る。円 C_1 の外側において円 C_1 および辺 AB, AC に同時に接する円を C_2 とし、円 C_1, C_2 の外側において円 C_2 および辺 AB, AC に同時に接する円を C_3 とする。以下同様に自然数 $n \geq 2$ に対して、円 C_1, C_2, \dots, C_{n-1} の外側において円 C_{n-1} および辺 AB, AC に同時に接する円を C_n とする。 C_n の半径 $R_n(\theta)$ を θ と n の式で表すと $R_n(\theta) =$ である。

- (3) x の 2 次式 $g_n(x) =$ に対して

$$\frac{d}{d\theta} \log R_n(\theta) = -\frac{g_n(\sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta}$$

が成り立つ。また θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で変化させるときに $R_n(\theta)$ が最大値をとるような θ の値を θ_n とすると $\sin \theta_n =$ である。

- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \theta_n =$ である。このことから、 $\theta = \theta_n$ のときの円 C_n の面積 S_n に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 S_n =$ が成り立つ。

— 下書き計算用 —

