平成20年度入学試験問題

数学

注意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。

数　学

〔Ⅰ〕 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の接線から x 軸，y 軸によって線分が切り取られる場合に，その線分の長さの最小値を求めよ。

〔Ⅱ〕

(1) すべての自然数 $n \geqq 2$ に対して，$\dfrac{1}{(n+1)n(n-1)}=\dfrac{a}{n(n-1)}+\dfrac{b}{(n+1)n}$ が成り立つように定数 a，b を定めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$\begin{cases} a_1=1, \\ a_{n+1}=\dfrac{n}{n+3}a_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

このとき，無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ。

〔Ⅲ〕 $R_0=\{x \mid x$ は実数，$x \neq -1,\ 0,\ 1\}$ とおく。R_0 を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

この関数 $f(x)$ の値域は R_0 である。自然数 n と $x \in R_0$ に対して，

$$\begin{cases} f_1(x)=f(x), \\ f_{n+1}(x)=f(f_n(x)) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

と定義する。

(1) $f_2(x)$，$f_3(x)$ を計算せよ。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3) $n=4,\ 5,\ 6,\ \cdots$ に対して，$f_n(x)$ を求めよ。

(4) $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して，$f_n(x)$ の逆関数 $f_n^{-1}(x)$ を求めよ。

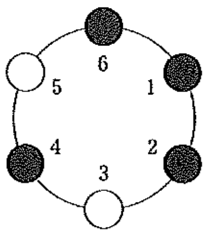
〔Ⅳ〕 $I=\{x \mid 0 \leqq x \leqq \pi\}$ の範囲で，2つの曲線 $C_1: y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$C_2: y=\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$ が定義されている。

(1) 2つの曲線 C_1，C_2 の概形を描け。

(2) 2曲線 C_1，C_2 の交点の x 座標を，I の範囲ですべて求めよ。

(3) 2曲線 C_1，C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。

〔Ⅴ〕 円周の6等分点に右回りで順に1から6まで番号をつける。硬貨を6回投げる。各 $i\,(1 \leqq i \leqq 6)$ に対して，i 回目に投げた硬貨が表なら白石，裏なら黒石を番号 i の点におく。できた石の配置において，連続して同色の石のおかれた点のみが同一の群に属すと考えて，6個の点をいくつかの群に分ける。各群に属する点の個数を群の大きさという。群の大きさの最大値を X とする。



例えば，点1，2，4，6に黒石，3，5に白石が配置されれば，$\{6,\ 1,\ 2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$ の4個の群に分かれる。群 $\{6,\ 1,\ 2\}$ の大きさは3，群 $\{3\}$，群 $\{4\}$，群 $\{5\}$ の大きさはそれぞれ1であり，$X=3$ である。

(1) 各 $n\,(1 \leqq n \leqq 6)$ に対して，$X=n$ である確率を求めよ。

(2) X の期待値（平均値）を求めよ。