大阪医科大学

平 成 31 年 度 入 学 試 験 問 題 （後期）

数　　　　　学

注　　　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数　学（後　期）

〔1〕

(1)　複素数 z が $|z| = 1$，$z \neq 1$，$z \neq -1$ を満たすとき，$\dfrac{z+1}{z-1}$ は純虚数であることを示せ。

(2)　複素数 α，β が $\alpha \neq \beta$ を満たすとする。$\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ が純虚数であるような複素数 z は一つの円上にあることを示し，その円の中心と半径を求めよ。

〔2〕　1から6までの番号をつけた6枚のカードから同時に4枚取り出し，大きさの順にならべて，X_1，X_2，X_3，X_4 $(X_1 < X_2 < X_3 < X_4)$ とする。$A = X_4 - X_1$，$B = X_3 - X_2$ とおく。

(1)　起こりうる $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)$ の総数を求めよ。

(2)　起こりうる $(A,\ B)$ の総数を求めよ。

(3)　確率が最大となる $(A,\ B)$ とその確率を求めよ。

〔3〕　中心が点O，半径が1の球面 S と，Oからの距離が $t\,(0 < t < 1)$ の平面 α がある。α と S の共通部分の円 T 上に異なる3点A，B，Cを，線分の長さが $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 1$ をみたすようにとり，T の半径を u とする。

(1)　このような3点A，B，Cがとれるような t の範囲を求めよ。

(2)　$\angle \mathrm{ABC} = 2\theta$ とするとき，$\sin\theta$ を u を用いて表せ。

(3)　$\triangle \mathrm{ABC}$ の面積を u を用いて表せ。

(4)　四面体OABCの体積が最大になるような u の値と，そのときの体積を求めよ。

〔4〕　n を自然数，π を円周率として，次のようにおく：

$$f_n(x) = (1-x)^n - x^n,\quad a_n = \int_0^1 (1-x)^n \cos \pi x\, dx$$

(1)　$n \geqq 1$ のとき，$0 < x < \dfrac{1}{2}$ において $f_n(x) > 0$ であることを示せ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$0 < x < \dfrac{1}{2}$ において $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ であることを示せ。

(3)　$n \geqq 1$ のとき，a_{n+1} と a_n の大小を調べよ。

〔5〕　関数 $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2} + x}{1 + x^2}$ を考える。

(1)　方程式 $f(x) = x$ の実数解を求めよ。

(2)　$\dfrac{3}{4} \leqq x < y \leqq 1$ のとき次の不等式を示せ。

$$0 < f(x) - f(y) < \frac{1}{2}(y - x)$$

(3)　$x_1 = 1$，$x_{n+1} = f(x_n)\ (n = 1, 2, \cdots)$ とおく。このとき，$\dfrac{3}{4} \leqq x_n \leqq 1$ であることを示せ。

(4)　極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} x_n$ を求めよ。