# 大阪医科大学

## 平成29年度入学試験問題（後期）

# 数　　　学

注　　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

# 数　学（後　期）

〔１〕 点$(a,\ b)$を中心とする円$C$は直線$L : y = x - 1$に接している。

(1) 円$C$の半径の２乗を$a$，$b$を用いて表せ。

(2) $C$が更に曲線$H : y = x^2$にも点$P\left(\dfrac{-1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$で接している。このような円$C$をすべて求めよ。ここで２曲線$C$と$H$が点$P$で接するとは，$P$が２曲線の共有点で，$P$における$C$の接線と$H$の接線が一致することである。

〔２〕

(1) $a$，$b$を$a < b$なる実数とする。閉区間$[a,\ b]$で定義された連続関数$f(x)$が，逆関数$f^{-1}(x)$をもつとする。また$f(x)$は開区間$(a,\ b)$で微分可能で，導関数$f'(x)$も$(a,\ b)$で連続ですべての$x \in (a,\ b)$について$f'(x) \neq 0$と仮定する。$c = f(a)$，$d = f(b)$とおくとき，次を示せ。

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_c^d f^{-1}(x)\,dx = bd - ac$$

(2) 閉区間$[e,\ e^2]$を定義域とする関数$g(x) = \dfrac{1}{x\log x}$は逆関数$g^{-1}(x)$をもつ（これは証明しなくて良い）。次の積分の値を求めよ。

$$\int_{\frac{1}{2e^2}}^{\frac{1}{e}} g^{-1}(x)\,dx$$

〔３〕 関数$g(x) = e^x$の合成関数$f(x) = g(g(x))$を考える。$n$を自然数として，$f(x)$の$n$次導関数を$f^{(n)}(x)$と表すとき，以下の問に答えよ。

(1) $f^{(1)}(x)$，$f^{(2)}(x)$を計算せよ。

(2) $t$の$n$次多項式$P_n(t)$が存在して，それは定数項をもたず，次の関係式を満たすことを示せ：

$$f^{(n)}(x) = P_n(e^x)f(x)$$

(3) $n$が２以上のとき，$P_n(t)$の$t$および$t^2$の係数をそれぞれ$a_n$，$b_n$と表す。$a_{n+1}$，$b_{n+1}$を$a_n$，$b_n$によって表せ。

(4) $n$が２以上のとき，$a_n$，$b_n$を求めよ。

〔４〕 $m$，$n$を自然数として，それぞれ番号が付いている玉$A_i\,(1 \leqq i \leqq m)$と箱$B_k\,(1 \leqq k \leqq n)$がある。すべての玉$A_i$をどれかの箱に入れた状態を玉の配置と呼ぶ。玉$A_i$の入った箱の番号を$N_i$とする。次のそれぞれの条件を満たす異なる配置の数を求めよ。ただし，条件を満たす配置が存在しないときは配置の数を０とする。

(1) 何の条件もつけない。

(2) $i < j$なら$N_i < N_j$である。

(3) $i < j$なら$N_i < N_j$であり，どの$k\,(1 \leqq k \leqq n-1)$に対しても$B_k$と$B_{k+1}$の両方に玉が入っていることはない。

〔５〕 平面上の正三角形△ABCの外心をOとし，OA＝1とする。その平面上の点Pについて，Oを始点とする半直線OPが辺ABと交わり，$0 \leqq \angle\mathrm{POA} \leqq \dfrac{\pi}{3}$とする。$\theta = \angle\mathrm{POA}$，$r = \mathrm{OP}$，$a = \mathrm{PA}$，$b = \mathrm{PB}$，$c = \mathrm{PC}$とおく。

(1) $a^2$，$b^2$，$c^2$を$r$と$\theta$で表せ。

(2) 不等式$a + b > c$が成り立つための必要十分条件は下の不等式が成り立つことであることを示せ。

$$2bc > 1 + r^2 + 4r\cos\theta$$

(3) $r \neq 1$ならば，$a$，$b$，$c$を３辺の長さとする三角形が存在することを示せ。