大阪医科大学

平成28年度入学試験問題（後期）

数　　学

注　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数　学（後　期）

〔1〕

(1) $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(2) a, b, c についての次の方程式の有理数解をすべて求めよ：

$$a + \sqrt{2}\,b + \sqrt{3}\,c = 0$$

(3) p, q, r についての次の方程式の有理数解をすべて求めよ：

$$(1 + \sqrt{3})p + (\sqrt{2} - 1)q + (\sqrt{3} - \sqrt{2})r = 1$$

〔2〕 複素数平面の原点を中心とし，半径 1 の円周を C とする。

(1) 複素数 α, β が C 上を動くとき $z = \alpha + \beta$ の値の範囲を求めよ。

(2) (1)で更に，α, β, 1 が三角形をなすようにという条件をおくとき，z の値の範囲を求め，複素数平面に図示せよ。

〔3〕 数列 $\{a_n\}$ がすべての自然数 n について $0 < a_n < 1$ をみたしているとする。この数列 $\{a_n\}$ を用いて，一辺の長さが 1 の正方形 $\mathrm{A_0B_0C_0D_0}$ から始めて，四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を次の規則で定義する。

辺 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}$, $\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}$, $\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{D}_{n-1}$, $\mathrm{D}_{n-1}\mathrm{A}_{n-1}$ を $a_n : 1 - a_n$ に内分する点をそれぞれ A_n, B_n, C_n, D_n とする。

四角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ の面積を S_n とし，$T_k = \sum_{n=1}^{k} S_n$ とする。

(1) すべての自然数 n に対し $a_n = \dfrac{1}{3}$ であるとき，$\lim_{k\to\infty} T_k$ を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。定数 $b_1, \cdots, b_n$ が $0 < b_i < 1$ $(i = 1, \cdots, n)$ をみたすとき，次の不等式を示せ。

$$(1 - b_1)(1 - b_2)\cdots(1 - b_n) > 1 - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

(3) すべての自然数 n に対し $a_n = \dfrac{1}{3^n}$ であるとき，$\lim_{k\to\infty} \dfrac{1}{T_k}$ を求めよ。

〔4〕 $P(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{2}$ とおく。区間 $I = \left\{\theta \mid -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ において，$f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, $f_3(\theta)$ を次のように定める：

$$f_1(\theta) = P(\cos\theta),\quad f_2(\theta) = P(f_1(\theta)),\quad f_3(\theta) = P(f_2(\theta))$$

$f_3(\theta)$ の導関数を $f_3'(\theta)$ と表す。他の $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ に対しても同様とする。

(1) I において，$f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ それぞれの値の範囲を求めよ。

(2) $f_3'(\theta) = 0$ となる θ は $f_2'(\theta) = 0$ もみたすことを示せ。

(3) I において，$f_3(\theta)$ の極値を求めよ。

〔5〕 4 枚のカードの表にそれぞれ 1，2，3，4 が記されている。4 枚のカードを裏返し，よく混ぜて 1 枚を取り出し，カードに記された数を見て元に戻す。$n \geqq 2$ として，この操作を n 回繰り返すとき，取り出されたカードの数の合計を X_n とする。

(1) n 回の操作で 1，2，3，4 のカードが出た回数をそれぞれ a, b, c, d 回とする。$X_n = n + 4$ となるような a, b, c, d の組合せをすべてあげよ。

(2) $X_n = n + 4$ である確率を求めよ。