平 成 21 年 度 入 学 試 験 問 題 （後期）

数　　　　学

注　　　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数 学（後 期）

〔1〕

(1) $f(x)$を実数係数の整式(多項式)，$f'(x)$をその導関数とする。$f(x)$が$(x^2+1)^2$で割り切れるためには，$f(x)$，$f'(x)$に虚数単位iを代入すると，$f(i)=0$，$f'(i)=0$となることが必要十分条件であることを示せ。

(2) m，nを自然数として，

$$g(x)=x^4(x^m+x^{m-1}+\cdots+x+1)-(x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1)=x^4\sum_{j=0}^{m}x^{m-j}-\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}$$

とおく。$g(x)$が$(x^2+1)^2$で割り切れるためのm，nの条件を求めよ。ただし，つぎの和の公式を使ってもよい。

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\quad (x\neq 1)$$

〔2〕 円$x^2+y^2=1$をCとして，円Cの外部にある点Pから円Cに2本の接線を引き，接点をQ，Rとする。直線QRをlとおく。lは原点O(0，0)を通らないので，lの方程式を$ax+by=1$ $(a^2+b^2\neq 0)$とおく。点Q，Rの中点をSとする。

(1) 線分OSの長さOSは，原点と直線lの距離であることに注意して，OSをa，bで表せ。

(2) 点Sの座標をa，bで表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a^2+b^2)\overrightarrow{\mathrm{OS}}$を示せ。

(4) 点Pの座標をa，bで表せ。

〔3〕 xyz空間に，平面$z=0$の上にある5つの点A(2，0，0)，B(2，4，0)，C(−2，−1，0)，D(0，−2，0)，O(0，0，0)と，この平面上にない点E(0，0，a) $(a>0)$をとる。点P，Qを，定数s，tを用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{EP}}=t\overrightarrow{\mathrm{EC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{ED}},\quad \overrightarrow{\mathrm{EQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{EO}}$$

で定めて，P，Qを通る直線とE，A，Bを通る平面の交点をRとおくと，$\overrightarrow{\mathrm{ER}}=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{EA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EB}}$となった。

(1) 空間ベクトル(x, y, z)の正射影とは，平面ベクトル(x, y)のことであるとする。例えば空間ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{EA}}=(2,\ 0,\ -a)$の正射影は，平面ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 0)$である。空間ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{ER}}$の正射影を計算せよ。

(2) P，Q，Rが1直線上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{ER}}=k\overrightarrow{\mathrm{EP}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{EQ}}$とおく。両辺の正射影を比較して，$k$，$t$を求めよ。

(3) sを求めよ。

〔4〕 aを$a>0$である定数として，$x>0$において，$f(x)=\frac{x^2}{2}+(a-1)x-a\log x$とおく。

(1) $f(x)$の極値を求めよ。

(2) $f(x)=0$の解の個数を求めよ。ただし，$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$を使ってもよい。

(3) 定積分$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx$の値が0となる$a$の値を求めよ。

〔5〕 aを$0<a<1$をみたす実数，nを2以上の自然数，kを$1\leqq k\leqq n$をみたす自然数とする。A，Bの2人を含む2^n人が参加し，各対戦が2人の引き分けなしの試合よりなるトーナメントを行う。1回戦の2^{n-1}個の対戦には全員が参加する。i回戦$(1\leqq i\leqq n-1)$の勝者の2^{n-i}人が次の$i+1$回戦に進み，n回戦に勝った者を優勝とする。

XとYが対戦したときXが勝つ確率を$P(X,\ Y)$と書くとき，

$$\begin{cases} P(A,\ B)=\dfrac{1}{2} \\ P(A,\ C)=P(B,\ C)=a \quad (C\text{は}A,\ B\text{以外の任意の1人}) \\ P(C,\ D)=\dfrac{1}{2} \quad (C,\ D\text{は}A,\ B\text{以外の任意の2人}) \end{cases}$$

とする。予め作成されたトーナメント表により，AとBはk回戦のみで対戦する可能性がある組み合わせとなった。

(1) AとBの対戦が行われる確率をa，n，kで表せ。

(2) $k\geqq 2$とする。Aはk回戦に進み，かつBはk回戦より前に負ける確率をa，n，kで表せ。

(3) Aが優勝する確率をa，n，kで表せ。