

# 大阪医科大学

平成 24 年 度 入 学 試 験 問 題 (前 期)

## 数 学

### 注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机に出しておくこと。

# 数 学 (前 期)

[ 1 ] 実数列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  に対して,  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  とおくと,

$S_n = -n^3 + 6n^2 - 11n + 6 + (n-2)a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つとする。

(1)  $n \geq 2, n \neq 3$  のとき  $a_n$  を  $a_{n-1}$  を用いて表せ。

(2)  $a_3 = 3$  として, すべての自然数  $n$  について  $a_n$  を求めよ。

(3)  $a_3 = 3, n \geq 3$  とするとき,  $\sum_{k=3}^n \frac{1}{a_k}$  を求めよ。

[ 2 ] (1)  $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$  の導関数を求めよ。

(2)  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  とおくと  $y$  は  $y = x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y}$  をみたすことを示せ。

(3) 不定積分  $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$  を求めよ。

(4) 双曲線  $y^2 - x^2 = 1$  と 2 直線  $x = -1, x = 1$  で囲まれる図形の面積を求めよ。

[ 3 ] 与えられた自然数  $n$  に対して,  $a^2 + b^2 + c^2 = n, a \geq b \geq c$  をみたす自然数の組  $(a, b, c)$  を求める問題を考える。

(1)  $n = 114$  のとき, 解  $(a, b, c)$  が存在すれば,  $7 \leq a \leq 10$  であることを示せ。

(2)  $n$  を 4 で割ったときの余りが 2 であるとき, 解  $(a, b, c)$  が存在すれば,  $a, b, c$  のうち 1 つが偶数, 他の 2 つが奇数であることを示せ。

(3)  $n = 114$  のとき, すべての解を求めよ。

[ 4 ] 空間に四面体 OABC がある。△OAB, △OBC, △OCA の垂心をそれぞれ P, Q, R とする。ここで三角形の垂心とは, 各頂点からそれぞれの対辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線の交点である。次の記号を用いる。

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, |\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b, |\vec{c}| = c, \vec{a} \cdot \vec{b} = f, \vec{b} \cdot \vec{c} = g, \vec{c} \cdot \vec{a} = h$$

(1) 直線 OA 上の点 D が  $\vec{a} \perp \overrightarrow{BD}$  をみたすとき,  $\overrightarrow{OD}$  を  $\vec{a}, a, f$  を用いて表せ。

(2)  $\overrightarrow{OP}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, a, b, f$  を用いて表せ。

(3)  $a = b = c = 1$  かつ  $f = g = h$  のとき, 3 直線 AQ, BR, CP は 1 点で交わることを示し, その交点を M とするとき,  $\overrightarrow{OM}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  と  $f$  を用いて表せ。

[ 5 ] 数直線上で点を単位時刻ごとに移動させ, 時刻  $n$  における点の位置を  $X_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) と表す。  $X_0 = 1$  として, 1 以上の  $n$  については,

$X_{n-1} = 1$  または 2 のとき, 硬貨を投げて表が出れば  $X_n = X_{n-1} - 1$ , 裏が出れば  $X_n = X_{n-1} + 1$  とする。

$X_{n-1} = 0$  または 3 のとき,  $X_n = X_{n-1}$  とする。

$X_n$  が 0, 1, 2, 3 となる確率をそれぞれ  $p_n, q_n, r_n, s_n$  とする。特に  $p_0 = r_0 = s_0 = 0, q_0 = 1$  である。

(1)  $p_2, q_2, r_2, s_2$  を求めよ。

(2)  $n \geq 2$  のとき,  $p_{n-2}, q_{n-2}, r_{n-2}, s_{n-2}$  を用いて  $p_n, q_n, r_n, s_n$  を表せ。

(3)  $n$  が偶数のとき,  $n$  を用いて  $p_n, q_n, r_n, s_n$  を表せ。

計算に使用する

計算に使用する

数 学 ( 前 期 )

(その1)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

下の線より上には解答を記入しないこと

---

{ 1 }

数 学 (前 期)

(その2)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

下の線より上には解答を記入しないこと

---

{ 2 }

数 学 (前 期)

(その3)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

下の線より上には解答を記入しないこと

---

[ 3 ]

数 学 (前 期)

(その4)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

下の線より上には解答を記入しないこと

---

[4]

数 学 (前 期)

(その5)

受験 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

受 験 番 号

数 学  
(前 期)

下の線より上には解答を記入しないこと

---

[ 5 ]

1	
2	
3	
4	
5	
計	