平成21年度入学試験問題（前期）

数　学

注　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数　学（前　期）

〔1〕 $A=\begin{pmatrix} 2a+1 & -a-1 \\ 2a+2 & -a-2 \end{pmatrix}$ とおく。すべての自然数 n に対して，A^n を求めよ。

〔2〕 a を定数として，$f(x)=4x^3-ax^2+(a-3)x$ とおく。$f(0)=0$，$f(1)=1$ である。

(1) $0 \leqq f(\frac{1}{2}) \leqq 1$ となる a の範囲を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $0 \leqq f(x) \leqq 1$ となる a の範囲を求めよ。

〔3〕

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，つぎの不等式が成り立つことを示せ。

$$2(1+x^2) \leqq \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2} \leqq 2(1+x^2)+\frac{x^2}{4}$$

(2) 不等式 $\dfrac{56}{81} \leqq \log 2 \leqq \dfrac{56}{81}+\dfrac{1}{324}$ を示せ。

〔4〕

(1) p を素数，k を $1 \leqq k \leqq p-1$ である自然数とするとき，二項係数 ${}_pC_k$ は p で割り切れることを証明せよ。

(2) p は素数で，$p>2$ とする。自然数 m，n に対して，$A=(m+n)^p-m^p-n^p$ は $2p$ で割り切れることを証明せよ。

〔5〕 袋の中に数字 1，2，3 を 1 つずつ書いた 3 個の球が入っている。袋から球を取り出し，書かれた数字を見て，球を袋に戻す。この試行を 4 回行うとき，数字 n が取り出された回数を X_n とする $(n=1,\ 2,\ 3)$。$X_1+X_2+X_3=4$ である。

(1) X_n の期待値 $E(X_n)$ を求めよ $(n=1,\ 2,\ 3)$。$(E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)$ であることを使ってもよい。$)$

(2) $i \geqq 0$，$j \geqq 0$ かつ $i+j \leqq 4$ をみたす整数 i，j に対して，事象 $X_2=i$，$X_3=j$ が起きる確率 $P(X_2=i,\ X_3=j)$ を，i，j を用いて表せ。

(3) $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対して，事象 $X_2X_3=k$ が起きる確率 $P(X_2X_3=k)$ を計算せよ。

(4) X_2X_3 の期待値 $E(X_2X_3)$ を計算せよ。