英語

Ⅰ	問1	1	⑤
		2	②
		3	①
		4	③
		5	④
		6	③
	問2	7	②
		8	④
		9	⑤
		10	①
	問3	11	④
	問4	12	③
		13	④
Ⅱ		14	③
		15	③
		16	②
		17	⑤
		18	④
		19	①
		20	⑤
		21	①
		22	①
		23	①
		24	⑤
		25	③

Ⅲ	26	⑤
	27	③
	28	②
Ⅳ	29	②
	30	⑤
	31	③
	32	⑦
	33	⑥
Ⅴ	34	④
	35	⑤
Ⅵ	36	⑨
	37	⑥
	38	④
	39	①
	40	③
	41	⑩
	42	⑦
	43	⑨

数学

【1】次の各文の$\boxed{}$にあてはまる答えを求めよ。

(1) 定積分$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\,dx$の値は$\boxed{(ア)}$である。また，定積分$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+3x^2}\,dx$の値は$\boxed{(イ)}$である。

(2) kを定数とし，$0 \leqq x \leqq \pi$において，方程式$16\sin^3 x - 24\sin^2 x + 9\sin x = k$を考える。$0 < k < 1$のとき，この方程式の異なる実数解の個数は$\boxed{(ウ)}$個である。また，$k = \boxed{(エ)}$のとき，この方程式の異なる実数解の個数は3個であり，これらの解のうち最大のものをαとすると，$\cos\alpha$の値は$\boxed{(オ)}$である。

(3) 極座標が$(1,0)$である点をA，極座標が$\left(\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$である点をBとする。このとき，極Oを通り，線分ABに垂直な直線lの極方程式は$\boxed{(カ)}$である。

また，aを正の定数とし，極方程式$r = a\cos\theta$で表される曲線が直線ABと接するとき，aの値は$\boxed{(キ)}$である。

(4) 複素数zが$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$を満たすとする。このとき，$z^7$の値は$\boxed{(ク)}$であり，$(1+z)(2+2z^2)(3+3z^3)(4+4z^4)(5+5z^5)(6+6z^6)$の値は$\boxed{(ケ)}$である。さらに，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \arg z \leqq \pi$であるとき，$|2-z+\bar{z}|$を最大とする$z$の偏角$\arg z$は$\boxed{(コ)}$である。

解答欄

(1)

(ア)	(イ)
$\dfrac{\log 2}{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$

(2)

(ウ)	(エ)	(オ)
6	1	$-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

(3)

(カ)	(キ)
$\theta = \dfrac{\pi}{6}$	$-6+4\sqrt{3}$

(4)

(ク)	(ケ)	(コ)
1	720	$\dfrac{4\pi}{7}$

【2】m は自然数とする。青球 2 個，赤球 1 個，黄球 1 球が入っている袋から，球を 1 個取り出し，色を調べてから袋に戻すことを m 回行う。このとき，青球がちょうど k 回取り出される確率を $p_m(k)$ とし，青球がちょうど k 回，赤球がちょうど l 回取り出される確率を $q_m(k.l)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$p_4(0)$ および $q_4(1,1)$ を求めよ。

$p_4(0)$ は 4 回中，4 回とも赤球または黄球が出る確率である。1 回の試行で，赤球または黄球が出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから，$p_4(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

$q_4(1,1)$ は 4 回中，青球がちょうど 1 回，赤球がちょうど 1 回，黄球がちょうど 2 回出る確率である。このような球のとりだし方は $\frac{4!}{2!}$ 通りであり，1 回の試行で青球を取り出す確率は $\frac{1}{2}$，赤球を取り出す確率は $\frac{1}{4}$，黄球を取り出す確率は $\frac{1}{4}$ であるから，

$$q_4(1,1)=\frac{4!}{2!}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{32}$$

答　$p_4(0)=\frac{1}{16}$　，　$q_4(1,1)=\frac{3}{32}$

(2)　正の定数 h に対して，数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\frac{n}{(1+h)^n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ で定める。このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ を示せ。

二項定理を用いて $(1+h)^n$ を展開すると，

$$\begin{aligned}(1+h)^n&={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n\\&=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n\end{aligned}$$

右辺の各項は 0 以上であるから $(1+h)^n\geqq\frac{n(n-1)}{2}h^2$ が任意の自然数 n について成り立つ。

したがって，$n\geqq 2$ のとき，$0\leqq a_n\leqq\dfrac{n}{\frac{n(n-1)}{2}h^2}=\dfrac{2}{h^2(n-1)}$ である。

ここで，$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{h^2(n-1)}=0$ であるから，はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を得る。

(3)　数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\sum_{j=0}^{n}\left\{\frac{j}{n}p_n(j)+(n-j)q_n(0, j)\right\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ で定める。このとき，$\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。

(1)と同様に考えて，

n 回中青球がちょうど j 回取り出される確率は $p_n(j)={}_n\mathrm{C}_j\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}={}_n\mathrm{C}_j\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

n 回中青球がちょうど 0 回，赤球がちょうど j 回，黄球がちょうど $n-j$ 回取り出される確率は $q_n(0, j)=\frac{n!}{0!j!(n-j)!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{1}{4}\right)^{n-j}={}_n\mathrm{C}_{n-j}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

である。ここで，$\sum_{j=0}^{n}(n-j){}_n\mathrm{C}_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}j{}_n\mathrm{C}_j$ を用いれば

$$b_n=\sum_{j=0}^{n}\left\{\frac{j}{n}p_n(j)+(n-j)q_n(0, j)\right\}=\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}\sum_{j=0}^{n}j{}_n\mathrm{C}_j\ \cdots\cdots（ア）$$

と表せる。一方，二項定理より $(1+x)^n=\sum_{j=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_jx^j$ であり，両辺を微分して $n(1+x)^{n-1}=\sum_{j=0}^{n}j{}_n\mathrm{C}_jx^{j-1}$ を得る。ここで，$x=1$ とすれば

$$\sum_{j=0}^{n}j{}_n\mathrm{C}_j=n\cdot 2^{n-1}\ \cdots\cdots（イ）$$

が得られる。（ア），（イ）より，$b_n=\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}\times n\cdot 2^{n-1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{2^n}\right)$

よって，(2)より $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}$

答　$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}$

【3】 O を原点とする座標平面上の点 A は x 軸上にあり，x 座標が 0 以上 2 以下の範囲を動く。また，点 B は AB＝OB＝1 を満たしながら動く点で，その y 座標は 0 以上とする。さらに，x 軸の正の部分と線分 OB のなす角を θ とし，線分 AB 上にあり OA＝2BP を満たす点を P とする。ただし，点 A が原点 O と一致するとき，点 B，点 P の座標はともに (0, 1) であるとする。

(1) 点 A および点 P の x 座標と y 座標を，それぞれ θ を用いて表せ。

条件より，θ のとり得る範囲は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。OB＝1 かつ∠AOB＝θ なので，点 B の媒介変数表示は $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ である。これと三角形 OAB が二等辺三角形であることから，A の媒介変数表示 $x=2\cos\theta$，$y=0$ が得られる。

また，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\mathrm{BP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}=\cos\theta$，$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}-\mathrm{BP}=1-\cos\theta$ であるから，点 P は AB を $1-\cos\theta:\cos\theta$ に内分する点である。よって，

(P の x 座標)$=\cos\theta\times 2\cos\theta+(1-\cos\theta)\times\cos\theta=\cos\theta(1+\cos\theta)$，(P の y 座標)$=\cos\theta\times 0+(1-\cos\theta)\times\sin\theta=\sin\theta(1-\cos\theta)$

である。これらに，$\theta=0$ を代入すれば P (2, 0) となり，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すれば P (0, 1) となる。

答　点 A：$x=2\cos\theta$，$y=0$　　点 P：$x=\cos\theta(1+\cos\theta)$，$y=\sin\theta(1-\cos\theta)$

(2) 点 P が描く曲線の長さを求めよ。

$x=\cos\theta(1+\cos\theta)$，$y=\sin\theta(1-\cos\theta)$ とすると，$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta=-\sin 2\theta-\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta=\cos\theta-\cos 2\theta$

したがって，加法定理および半角の公式より

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(\sin 2\theta+\sin\theta)^2+(\cos\theta-\cos 2\theta)^2=2(1-\cos 3\theta)=4\sin^2\frac{3\theta}{2}$$

よって，求める長さは

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{3\theta}{2}\,d\theta=-\frac{4}{3}\left[\cos\frac{3}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4+2\sqrt{2}}{3}$$

答　$\dfrac{4+2\sqrt{2}}{3}$

(3) 点 P が描く曲線，x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

条件より，θ のとり得る範囲は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。$\theta=0$ のとき P の座標は (2, 0)，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき P の座標は (0, 1) である。また，θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$\cos\theta$ の値は減少するので，$x=\cos\theta(1+\cos\theta)$ の値も減少する。一方，$\sin\theta$ の値は増加し，$1-\cos\theta$ の値も増加するので，$y=\sin\theta(1-\cos\theta)$ の値も増加する。したがって，求める面積は

$$\begin{aligned}\int_0^2 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta(1-\cos\theta)(\sin 2\theta+\sin\theta)\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta(1+\cos\theta-2\cos^2\theta)\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\sin^2\theta\cos\theta-\frac{1-\cos 4\theta}{4}\right)d\theta\\&=\left[\frac{\theta}{4}-\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\sin^3\theta}{3}+\frac{\sin 4\theta}{16}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

答　$\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{3}$

物理

Ⅰ	問1	1	③
		2	③
	問2	3	⑨
		4	⑨
	問3	5	③
		6	⑱
	問4	7	②
		8	⑩
		9	①
		10	①
		11	④
		12	⑤
		13	①
		14	①
	問5	15	⑦
		16	⑪

Ⅱ	問1	17	⑨
		18	⑫
	問2	19	③
		20	④
	問3	21	⑮
		22	⑪

Ⅲ	問1	23	③
		24	⑧
	問2	25	③
		26	⑨
	問3	27	⑦
		28	①
	問4	29	⑧
		30	⑨
	問5	31	⑥
		32	④

化学

Ⅰ	問1		1	④
	問2		2	⑦
	問3		3	②
	問4		4	⑨
	問5		5	④
	問6		6	③
	問7		7	⑧
	問8		8	③
Ⅱ	問1		9	①
	問2		10	⑦
	問3		11	⑨
	問4		12	③
Ⅲ	問1		13	③
	問2		14	④
	問3		15	⑥
	問4		16	④
Ⅳ	問1	(1)	17	⑤
		(2)	18	④
	問2	(1)	19	②
		(2)	20	④
Ⅴ	問1		21	⑤
	問2	(1)	22	⑧
		(2)	23	⑥
		(3)	24	④

生物

I	1	⑬
	2	⑩
	3	⑧
	4	⑨
	5	⑧
	6	⑦
	7	⑨
	8	⑬
	9	⑩
	10	⑫
	11	⑥
	12	④
	13	①
	14	③
	15	⑥
	16	④
	17	⑨
	18	⑧
II	19	⑤
	20	③
	21	②
	22	③
	23	④
	24	⑥
	25	⑩
	26	⑨
	27	①
	28	⑦
	29	①
	30	⑩
	31	⑩
	32	⑩
	33	④
	34	③
	35	②
	36	①
	37	②
	38	⑤
	39	②
	40	②
	41	②
	42	④
III	43	③
	44	②
	45	②
	46	③
	47	②
	48	⑦
	49	①
	50	⑥
	51	①
	52	②
	53	⑩
	54	⑨
	55	⑪
	56	①
	57	⑥
	58	④
	59	④
	60	⑥