英語

大問	小問	番号	解答
Ⅰ	問1	1	4
		2	5
		3	4
		4	2
		5	2
		6	3
	問2	7	3
		8	5
	問3	9	2
		10	4
		11	5
	問4	12	5
		13	3
Ⅱ		14	3
		15	1
		16	2
		17	3
		18	2
		19	4
		20	1
		21	2
		22	4
		23	5
Ⅲ		24	5
		25	3
		26	4
		27	1
		28	2
Ⅳ		29	5
		30	2
		31	4
		32	1
Ⅴ	問1	33	5
		34	2
		35	4
		36	1
		37	3
	問2	38	5
Ⅵ	(A)	39	6
		40	4
		41	8
	(B)	42	7
		43	5
		44	6

数学

【1】次の各文の $\boxed{}$ にあてはまる答えを求めよ。

(1) 原点Oと点 $(1, e-1)$ で曲線 $y=e^x-1$ と交わる直線を l とする。このとき，曲線 $y=e^x-1$ と直線 l で囲まれた部分の面積は $\boxed{(ア)}$ である。また，曲線 $y=e^x-1$ と直線 l で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積は $\boxed{(イ)}$ である。

(2) a，b を異なる実数とし，i を虚数単位とする。4つの複素数 $3+i$，$2+3i$，$a+bi$，$b+ai$ の表す複素数平面上の4点をそれぞれA，B，C，Dとする。$a=5$，$b=3$ であるとき，2つの線分ACとADのなす角 θ の値は $\boxed{(ウ)}$ である。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。また，3点A，B，Cが一直線上にあるとき，b は a を用いて $b=\boxed{(エ)}$ と表せる。3点A，B，Cが一直線上にあり，2つの直線ADとBDが垂直であるとき，a の値は $\boxed{(オ)}$ または $\boxed{(カ)}$ である。ただし，A，B，C，Dは相異なる4点とする。

(3) 関数 $f(x)=\dfrac{3+2\sin 2x}{\sin x+\cos x}\ \left(-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$ を考える。$\sin x+\cos x=t$ とおくとき，$f(x)$ を t を用いて表すと，$f(x)=\boxed{(キ)}$ となる。また，$f(x)$ は $x=\boxed{(ク)}$ で最小値をとる。方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数が2個であるとき，定数 k のとり得る値の範囲は $\boxed{(ケ)}$ である。

(4) 自然数 n に対して，4個の数字3，4，5，6を重複を許して使ってできる n 桁の整数のうち3の倍数であるものの個数を a_n とする。このとき，a_1 の値は2，a_2 の値は6，a_3 の値は $\boxed{(コ)}$，a_4 の値は $\boxed{(サ)}$ である。数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{(シ)}$ である。

解答欄

(1)

(ア)	(イ)
$-\dfrac{e-3}{2}$	$-\dfrac{\pi}{6}(e^2-8e+13)$

(2)

(ウ)	(エ)	(オ)	(カ)
$\dfrac{\pi}{4}$	$-2a+7$	$\dfrac{11+\sqrt{6}}{5}$	$\dfrac{11-\sqrt{6}}{5}$

(3)

(キ)	(ク)	(ケ)
$2t+\dfrac{1}{t}$	$-\dfrac{\pi}{12}$	$2\sqrt{2}<k<\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

(4)

(コ)	(サ)	(シ)
22	86	$\dfrac{4^n+2}{3}$

※(オ)と(カ)の答は逆でもよい。

【2】 a，b を正の定数とし，楕円 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{2}=1$ を C_1，双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{b}=1$ を C_2 とする。C_1 と C_2 は 4 つの共有点をもつとし，それらを頂点とする四角形の面積を S とする。

また，点 P を第 1 象限にある C_1 と C_2 の共有点とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 点 P の座標を a，b を用いて表せ。また，a のとり得る値の範囲を求めよ。

C_1 と C_2 の共有点の座標は

x，y についての連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{2}=1 \\ x^2-\dfrac{y^2}{b}=1 \end{cases}$$

の実数解として得られる。

この連立方程式を x^2，y^2 についての

連立 1 次方程式と見なして解くと，

$$x^2=\frac{a(b+2)}{ab+2},\quad y^2=\frac{2b(a-1)}{ab+2}$$

($a>0$，$b>0$ より，$ab+2\neq 0$)

C_1 と C_2 が 4 つの共有点をもつのは，

この 2 つの等式の右辺がともに正の

ときなので，$a>1$ のときである。

$a>1$ のとき，

$$p=\sqrt{\frac{a(b+2)}{ab+2}},\quad q=\sqrt{\frac{2b(a-1)}{ab+2}}$$

とおくと，C_1 と C_2 は 4 つの共有点の座標は

$(p,\ q)$，$(p,\ -q)$，$(-p,\ q)$，$(-p,\ -q)$

点 P は第 1 象限にある C_1 と C_2 は共有点

なので，点 P の座標は $(p,\ q)$ である。

答　点 P の座標：$\left(\sqrt{\dfrac{a(b+2)}{ab+2}},\ \sqrt{\dfrac{2b(a-1)}{ab+2}}\right)$，　a のとり得る値の範囲：　$a>1$

(2) 点 P における C_1 と C_2 の接線は垂直に交わるとする。このとき，b と S をそれぞれ a を用いて表せ。また，a のとり得る値の範囲を求めよ。

$\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{2}=1$ の両辺をそれぞれ x で微分すると，

$$\frac{2x}{a}+y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{ay}\quad (y\neq 0)$$

これより，点 P における C_1 の接線の傾きは

$$-\frac{2p}{aq}=-\sqrt{\frac{2(b+2)}{ab(a-1)}}\quad \cdots①$$

$x^2-\dfrac{y^2}{b}=1$ の両辺をそれぞれ x で微分すると，

$$2x-\frac{2y}{b}\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{bx}{y}\quad (y\neq 0)$$

これより，点 P における C_2 の接線の傾きは

$$\frac{bp}{q}=\sqrt{\frac{ab(b+2)}{2(a-1)}}\quad \cdots②$$

①，②より，点 P における C_1 と C_2 の接線

が垂直に交わるための必要十分条件は

$$-\sqrt{\frac{2(b+2)}{ab(a-1)}}\times\sqrt{\frac{ab(b+2)}{2(a-1)}}=-1$$

$a>1$，$b>0$ より，これを整理すると

$b=a-3$ となり，a のとり得る値の範囲

は $a>3$ であることがわかる。

また，S は(1)で求めた 4 つの共有点

を頂点とする長方形の面積なので，

$$S=4pq=\frac{4\sqrt{2ab(a-1)(b+2)}}{ab+2}$$

$b=a-3$ より，

$$S=\frac{4(a-1)\sqrt{2a(a-3)}}{a(a-3)+2}=\frac{4\sqrt{2a(a-3)}}{a-2}$$

答　$b=a-3$，　$S=\dfrac{4\sqrt{2a(a-3)}}{a-2}$，　a のとり得る値の範囲：　$a>3$

(3) 点 P における C_1 と C_2 の接線は垂直に交わるとする。$S=k$ を満たす異なる a の値の個数が 2 個であるとき，定数 k のとり得る値の範囲を求めよ。

$f(a)=\dfrac{4\sqrt{2a(a-3)}}{a-2}\quad(a>3)$ とおく。

a についての方程式 $f(a)=k$ が 2 つ

の異なる実数解をもつような定数 k

の範囲を求めればよい。

$$f'(a)=\frac{-4(a-6)}{(a-2)^2\sqrt{2a(a-3)}}$$

より，$f'(a)=0$ となる a の値は $a=6$

である。$a>3$ における $f(a)$ の増減表

は次のようになる。

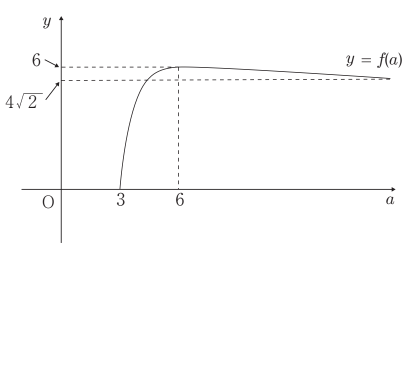
a	3	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(a)$		+	0	−
$f(a)$		↗	6	↘

また，$\displaystyle\lim_{a\to 3+0} f(a)=\lim_{a\to 3+0}\frac{4\sqrt{2a(a-3)}}{a-2}=0$

$$\lim_{a\to\infty} f(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{4\sqrt{2a(a-3)}}{a-2}=\lim_{a\to\infty}\frac{4\sqrt{2\left(1-\dfrac{3}{a}\right)}}{1-\dfrac{2}{a}}=4\sqrt{2}$$

したがって，曲線 $y=f(a)$ の概形は下の図の

ようになる。



ここで，直線 $y=4\sqrt{2}$ は曲線 $y=f(a)$

の漸近線である。

曲線 $y=f(a)$ と直線 $y=k$ の共有点の

a 座標が方程式 $f(a)=k$ の実数解であ

るので，方程式 $f(a)=k$ が 2 つの異な

る実数解をもつのは $4\sqrt{2}<k<6$ の

ときである。

答　$4\sqrt{2}<k<6$

【3】次の問に答えよ。必要であれば，自然対数の底 e は $2<e<3$ を満たすことを用いてよい。

(1)　$f(x)=\dfrac{1-x\log x}{x}$ とおく。方程式 $f(x)=0$ がただ1つの実数解をもつことを示せ。

$f(x)$ は $1\leqq x\leqq e$ の範囲で連続であって，

$$f(1)=1>0,\quad f(e)=\frac{1-e}{e}<0$$

である。

したがって，中間値の定理により，

方程式 $f(x)=0$ は $1<x<e$ の範囲に

少なくとも1つの実数解をもつ。

$f(x)=\dfrac{1-x\log x}{x}=\dfrac{1}{x}-\log x$ を微分すると，

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$$

となるので，$f(x)$ の定義域 $x>0$ において，

つねに $f'(x)<0$ である。

よって，$f(x)$ は定義域 $x>0$ で減少するので，

方程式 $f(x)=0$ の実数解はただ1つである。

(2)　(1)の方程式 $f(x)=0$ のただ1つの実数解を α とおく。2つの曲線 $y=c\log x$ と $y=e^x$ が共通の接線をもつとき，正の定数 c のとり得る値の範囲を α を用いて表せ。

$y=c\log x$ を微分すると $y'=\dfrac{c}{x}$ となるので，

曲線 $y=c\log x$ 上の点 $(t, c\log t)$ における接線の方程式は

$$y-c\log t=\frac{c}{t}(x-t)\qquad \therefore y=\frac{c}{t}x+c(\log t-1)\quad \cdots①$$

$y=e^x$ を微分すると $y'=e^x$ となるので，

曲線 $y=e^x$ 上の点 $(s,\ e^s)$ における接線の方程式は

$$y-e^s=e^s(x-s)\qquad \therefore y=e^sx+(1-s)e^s\quad \cdots②$$

①と②が同一の直線の方程式であるとすると，

$$\begin{cases}\dfrac{c}{t}=e^s & \cdots③\\ c(\log t-1)=(1-s)e^s & \cdots④\end{cases}$$

関数 $y=c\log x$ の定義域は $x>0$ なので $t>0$ であり，

③と $c>0$ より，　$s=\log c-\log t$

これを④に代入すると，

$$c(\log t-1)=(1-\log c+\log t)\frac{c}{t}$$

両辺にそれぞれ $\dfrac{t}{c}$ を掛けて整理すると，

$$\log c=1+t+(1-t)\log t$$

逆に，この等式が成り立つ正の数 t が存在するとき，

$s=\log c-\log t$ とおくと，①と②は同一の方程式となり，

曲線 $y=\log x$ と曲線 $y=e^x$ は共通の接線をもつ。

よって，$g(t)=1+t+(1-t)\log t\quad (t>0)$ とおくとき，

方程式 $g(t)=\log c$ が解をもつ正の定数 c の範囲を求めればよい。

$$g'(t)=\frac{1}{t}-\log t=f(t)\qquad (f(x)\text{ は(1)の関数})$$

より，$g'(t)$ は $t>0$ の範囲で減少し，$g'(t)=0$ となる t の値は

$t=\alpha$ である。また，$g'(\alpha)=0$ より $\log\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$ であるので，

$$g(\alpha)=1+\alpha+(1-\alpha)\times\frac{1}{\alpha}=\alpha+\frac{1}{\alpha}$$

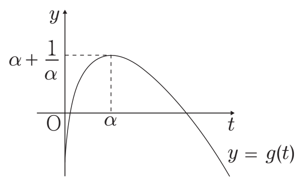
よって，$g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(t)$	/	$+$	0	$-$
$g(t)$	/	↗	$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$	↘

また，$\displaystyle\lim_{t\to+0}g(t)=\lim_{t\to+0}\{1+t+(1-t)\log t\}=-\infty$

$$\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}t\left\{\frac{1}{t}+1+\left(\frac{1}{t}-1\right)\log t\right\}=-\infty$$

したがって，曲線 $y=g(t)$ の概形は下の図のようになる。



曲線 $y=g(t)$ と直線 $y=\log c$ の共有点の t 座標が方程式

$g(t)=\log c$ の実数解であるので，方程式 $g(t)=\log c$ が

実数解をもつのは $\log c\leqq\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ のときである。

よって，c のとり得る値の範囲は $0<c\leqq e^{\alpha+\frac{1}{\alpha}}$ である。

答　$0<c\leqq e^{\alpha+\frac{1}{\alpha}}$

物理

Ⅰ	問1	1	2
		2	7
	問2	3	9
		4	4
	問3	5	7
		6	14
	問4	7	12
		8	16
	問5	9	3
		10	7
		11	12
Ⅱ	問1	12	6
	問2	13	4
		14	2
	問3	15	2
	問4	16	4
	問5	17	6
	問6	18	7
	問7	19	7
		20	3

Ⅲ	問1	21	2
		22	1
		23	9
	問2	24	6
	問3	25	7
		26	7

化学

I	問1		1	4
	問2		2	5
	問3		3	1
	問4		4	3
	問5		5	9
	問6		6	6
	問7		7	7
	問8		8	10
II	問1		9	7
	問2		10	9
	問3		11	8
	問4		12	8
III	問1		13	−
	問2		14	4
	問3		15	4
	問4		16	7
IV	問1		17	5
	問2		18	5
	問3		19	6
	問4		20	7
V	問1	(1)	21	2
		(2)	22	9
	問2	(1)	23	4
		(2)	24	3

生物

I	1	5
	2	2
	3	10
	4	7
	5	4
	6	1
	7	15
	8	7
	9	3
	10	2
	11	1
	12	12
	13	2
	14	12
	15	3
	16	10
II	17	5
	18	3
	19	10
	20	2
	21	8
	22	4
	23	3
	24	1
	25	4
	26	3
	27	2
	28	6
	29	12
	30	9
	31	11
III	32	3
	33	11
	34	5
	35	4
	36	5
	37	5
	38	4
	39	6
	40	3
	41	3
	42	1
	43	5
	44	4
	45	7
	46	5
	47	4
	48	1
	49	3
	50	6