英語

Ⅰ	問1	1	3
		2	5
		3	5
		4	2
		5	4
	問2	6	1
		7	4
		8	1
		9	2
		10	5
	問3	11	1
		12	5
		13	2
		14	4
		15	3
Ⅱ	問1	16	1
		17	7
		18	4
		19	8
		20	2
		21	3
		22	5
		23	6
	問2	24	3
	問3	25	5
		26	4

Ⅲ		27	3
		28	2
		29	4
		30	3
		31	5
		32	4
Ⅳ		33	2
		34	1
		35	4
		36	2
		37	3
		38	1
Ⅴ	（ア）	39	4
		40	3
	（イ）	41	2
		42	1
	（ウ）	43	1
		44	10
	（エ）	45	4
		46	9
	（オ）	47	5
		48	10

数学

【1】次の$\boxed{}$にあてはまる答を下の解答欄に記せ。

(1) 空間に4点 A(5, 1, 3), B(4, 4, 3), C(2, 3, 5), D(4, 1, 3)がある。

(i) $\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{DB}$ のなす角を θ とおくとき，$\theta=$ $\boxed{（ア）}$である。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(ii) 四面体 ABCD の体積は$\boxed{（イ）}$である。

(2) aを実数の定数とする。xについての2次方程式 $x^2-2x\log_2(a+1)(a-5)+4=0$ の解の1つが2であるとき，a の値は$\boxed{（ウ）}$である。また，この2次方程式が実数解をもたないようなの a の値の範囲は$\boxed{（エ）}$である。

(3) 不等式 $x^2+2x \leqq y \leqq 2x+2 \leqq \frac{4}{3}y$ の表す領域の面積は$\boxed{（オ）}$である。また，この領域上の点 $(x,\ y)$ のうち，$5x-3y$ が最小となるような点の座標は$\boxed{（カ）}$である。

(4) nは正の整数とする。階段を1度に1段，2段，または3段登る。このとき，n段からなる階段の登り方の総数を a_nとする。例えば，$a_1=1$ であり，$a_2=2$ である。

(i) a_3の値は$\boxed{（キ）}$である。

(ii) a_4の値は$\boxed{（ク）}$である。

(iii) a_{10}の値は$\boxed{（ケ）}$である。

(5) $0<t<\frac{\pi}{2}$ とする。曲線 $y=\sin x$ 上の点 $P\left(t+\frac{\pi}{2}, \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ における法線を l とおく。直線 $x=\frac{\pi}{2}$ を m とおき，法線 l と直線 m の交点を Q とする。

(i) $t=\frac{\pi}{3}$ のとき，点 Q の座標は$\boxed{（コ）}$である。

(ii) 曲線 $y=\sin x$ と法線を l および直線 m で囲まれた部分の面積を $S(t)$とするとき，極限 $\lim_{t\to+0}\frac{S(t)}{t}$ の値は$\boxed{（サ）}$である。

解答欄

(1)	(ア) 90°	(イ) 1
(2)	(ウ) $2+\sqrt{13}$ または $2-\sqrt{13}$	(エ) $2-\sqrt{13}<a<\frac{4-\sqrt{37}}{2}$ ，$\frac{4+\sqrt{37}}{2}<a<2+\sqrt{13}$
(3)	(オ) $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$	(カ) $\left(\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2}\right)$

(4)	(キ) 4	(ク) 7	(ケ) 274

(5)	(コ) $\left(\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{9-4\sqrt{3}\pi}{18}\right)$	(サ) $\frac{1}{2}$

【2】 行列 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対し， $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$， $A^n\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ （n=1, 2, 3, …）とおく。以下の問に答えよ。

(1) $b_{n+1}=b_1a_n+d_1b_n$， $b_{n+1}=a_1b_n+b_1d_n$ （n=1, 2, 3, …）が成り立つことを示せ。

$n\geqq 1$ のとき， $A^{n+1}=A^nA$ より

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_na_1+b_nc_1 & a_nb_1+b_nd_1 \\ c_na_1+d_nc_1 & c_nb_1+d_nd_1 \end{pmatrix}$$

(1, 2) 成分をくらべて $b_{n+1}=a_nb_1+b_nd_1=b_1a_n+d_1b_n$ …①

また，$n\geqq 1$ のとき， $A^{n+1}=A^nA$ より

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_n+b_1c_n & a_1b_n+b_1d_n \\ c_1a_n+d_1c_n & c_1b_n+d_1d_n \end{pmatrix}$$

(1, 2) 成分をくらべて $b_{n+1}=a_1b_n+b_1d_n$ …②

①，②より題意は示された。

(2) A^n （n=1, 2, 3, …）を求めよ。

$$A^1=A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdots①,\quad A^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{70}{3} \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

よって， A^n は次のようになることが推測される。 $A^n=\begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} & b_n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\cdots②$

（ア） n=1 のとき，①より明らかに②は成り立つ。

（イ） $n=k$ のとき，②が成り立つ，すなわち $A^k=\begin{pmatrix} \frac{1}{3^k} & b_k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\cdots③$

が成り立つと仮定する。$n=k+1$ のとき，③により

$$A^{k+1}=AA^k=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3^k} & b_k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3^{k+1}} & \frac{1}{3}b_k+7\cdot 3^k \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$$

よって， $a_{k+1}=\dfrac{1}{3^{k+1}}$， $c_{k+1}=0$， $d_{k+1}=3^{k+1}$， すなわち $A^{k+1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3^{k+1}} & b_{k+1} \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$

したがって，$n=k+1$ のとき，②は成り立つ。
(ア)，(イ)より，数学的帰納法を用いると，②はすべての正の整数について成り立つ。

次に， b_n を求める。$n\geqq 1$ のとき，(1)より

$$b_1a_n+d_1b_n=a_1b_n+b_1d_n$$

$$(d_1-a_1)b_n=b_1d_n-b_1a_n$$

$$\left(3-\frac{1}{3}\right)b_n=7\cdot 3^n-7\cdot\frac{1}{3^n}$$

$$b_n=\frac{3}{8}\cdot 7(3^n-3^{-n})$$

以上より，$n\geqq 1$ に対して

$$A^n=\begin{pmatrix} 3^{-n} & \frac{21}{8}(3^n-3^{-n}) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

答 $A^n=\begin{pmatrix} 3^{-n} & \frac{21}{8}(3^n-3^{-n}) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

(3) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{\sqrt{p^2{}_n+q^2{}_n}}$ の値を求めよ。

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3^{-n} & \frac{21}{8}(3^n-3^{-n}) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 3^{-n}+\frac{105}{8}(3^n-3^{-n}) \\ 5\cdot 3^n \end{pmatrix}\cdots①$$

$$\frac{p_n}{\sqrt{p^2{}_n+q^2{}_n}}=\frac{p_n}{q_n\sqrt{\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2+1}}=\frac{\frac{p_n}{q_n}}{\sqrt{\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2+1}}\cdots②$$

一方，①より， $\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{2\cdot 3^{-n}+\frac{105}{8}(3^n-3^{-n})}{5\cdot 3^n}=\dfrac{2\cdot 3^{-2n}+\frac{105}{8}(1-3^{-2n})}{5}$

よって， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{0+\frac{105}{8}(1-0)}{5}=\dfrac{21}{8}\cdots③$

②，③より $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{\sqrt{p^2{}_n+q^2{}_n}}=\dfrac{\frac{21}{8}}{\sqrt{\left(\frac{21}{8}\right)^2+1}}=\dfrac{\frac{21}{8}}{\frac{1}{8}\sqrt{21^2+8^2}}=\dfrac{21}{\sqrt{505}}=\dfrac{21\sqrt{505}}{505}$

答 $\dfrac{21\sqrt{505}}{505}$

【3】 a は $0<a<e$ を満たす定数とする。曲線 $y=\log x$ 上の点 $\mathrm{A}(a, \log a)$ における接線を l, 法線を m とおく。以下の問に答えよ。必要ならば $e=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$ で，$2.718<e<2.719$ であることを用いてよい。

(1) 接線 l の方程式を a を用いて表せ。

$y'=\dfrac{1}{x}$ より，l の傾きは，$\dfrac{1}{a}$ となる。

よって，l の方程式は

$y-\log a=\dfrac{1}{a}(x-a)$

整理して，$y=\dfrac{1}{a}x-1+\log a$

答　$y=\dfrac{1}{a}x-1+\log a$

(2) 接線 l が x 軸と交わる点を P，y 軸と交わる点を Q とし，原点を O とする。三角形 OPQ の面積を $S(a)$ とおくとき，$S(a)$ を a を用いて表せ。

l の方程式で，$y=0$ とすると，

$\dfrac{1}{a}x=1-\log a$

$x=a(1-\log a)$

よって，P の座標は，$\mathrm{P}\,(a(1-\log a), 0)$

l の方程式で，$x=0$ とすると，

$y=-1+\log a$

よって，Q の座標は，$\mathrm{Q}\,(0, -1+\log a)$

また，$0<a<e$ より，$-1+\log a<0$

ゆえに，

$$S(a)=\frac{1}{2}\,\mathrm{OP}\times\mathrm{OQ}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot a(1-\log a)(1-\log a)$$
$$=\frac{a(1-\log a)^2}{2}$$

答　$=\dfrac{a(1-\log a)^2}{2}$

(3) a が $0<a<e$ の範囲を動くとき，(2)の $S(a)$ を最大にする a の値と $S(a)$ の最大値を求めよ。

$$S'(a)=\frac{1}{2}(1-\log a)^2+\frac{a}{2}\cdot 2(1-\log a)\left(-\frac{1}{a}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(1-\log a)\{(1-\log a)-2\}$$
$$=\frac{1}{2}(\log a+1)(\log a-1)$$

$S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e
$S'(a)$	／	$+$	0	$-$	／
$S(a)$	／	↗	極大 $\frac{2}{e}$	↘	／

増減表より，$S(a)$ は $a=\dfrac{1}{e}$ において最大値 $\dfrac{2}{e}$ をとる。

答　a の値：$\dfrac{1}{e}$　，$S(a)$ の最大値：$\dfrac{2}{e}$

(4) a が $0<a<e$ の範囲を動くとき，法線 m が点 $(e, 0)$ を通るような a の値の個数はただ 1 個であることを示せ。

m の方程式は $y-\log a=-a(x-a)$

整理して，$y=-ax+a^2+\log a$

m が点 $(e, 0)$ を通るための必要十分条件は

$0=-ae+a^2+\log a$ で与えられる。

右辺を $g(a)$ （ただし，$0<a<e$ ）とおいて，

$g(a)=0$ 　$\cdots$①

の実数解の個数がただ 1 個であることを示せばよい。

$g(a)$ の導関数を求めると，

$$g'(a)=-e+2a+\frac{1}{a}=\frac{2a^2-ea+1}{a}$$

a についての 2 次方程式 $2a^2-ea+1=0$ の判別式を D とおくと，

$$D=(-e)^2-4\cdot 2\cdot 1$$
$$=e^2-8<2.719^2-8<2.8^2-8=-0.16<0$$

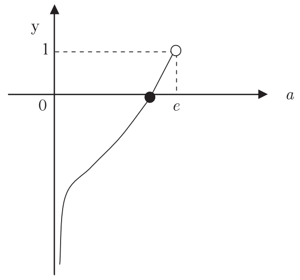
よって，$2a^2-ea+1$ は正であるから，とくに，$0<a<e$ において，$g'(a)>0$

ゆえに，$g(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	$\cdots$	e
$g'(a)$	／	$+$	／
$g(a)$	／	↗	／

また $\lim_{a\to +0} g(a)=-\infty$，$\lim_{a\to e-0} g(a)=1$

したがって，$y=g(a)$ のグラフは次のようになる。



$y=g(a)$ のグラフと a 軸の共有点の a 座標が方程式①の実数解であるから，①の実数解の個数はただ 1 個である。以上より，題意は証明された。

物理

Ⅰ	1	10
	2	3
	3	6
	4	12
	5	14
	6	4
	7	9
	8	6
	9	15
	10	9
	11	2
	12	9

Ⅱ	13	3
	14	13
	15	12
	16	13
	17	2
	18	8
	19	1
	20	15

Ⅲ	21	6
	22	8
	23	2
	24	1
	25	1
	26	8
	27	2
	28	7
	29	2
	30	5
	31	2
	32	2
	33	1
	34	4
	35	2
	36	9
	37	7
	38	5
	39	2
	40	2
	41	6
	42	3
	43	2
	44	7
	45	1
	46	8

化学

Ⅰ	［1］		1	5
	［2］		2	1
	［3］		3	3
	［4］		4	6
	［5］		5	2
	［6］		6	4
	［7］		7	7
	［8］		8	9
Ⅱ	［1］	(1)	9	9
		(2)	10	5
	［2］	(1)	11	2
		(2)	12	3

Ⅲ	［1］		13	6
	［2］		14	3
	［3］		15	1
	［4］		16	4
Ⅳ	［1］	(1)	17	5
		(2)	18	1
	［2］	(1)	19	4
		(2)	20	5
Ⅴ	［1］		21	7
	［2］		22	2
	［3］		23	5
	［4］		24	4

生物

Ⅰ	1	9
	2	14
	3	7
	4	2
	5	10
	6	6
	7	7
	8	1
	9	7
	10	1
	11	13
	12	1
	13	2
	14	2
	15	12
	16	15
	17	13
	18	2
Ⅱ	19	7
	20	1
	21	7
	22	2
	23	6
	24	1
	25	12
	26	3
	27	5
	28	12
	29	6
	30	12
	31	10
	32	13

Ⅲ	33	12
	34	12
	35	3
	36	7
	37	7
	38	7
	39	5
	40	1
	41	2
	42	2
	43	7
	44	8
	45	3
	46	2
	47	6
	48	5
	49	3
	50	5
	51	10