29 M

数　学

[注意事項]

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 問 Ⅰ, Ⅱ の解答はマークシートにマークし，問 Ⅲ の解答は専用の解答用紙に書くこと。
3. マークシート解答用紙は，コンピュータで処理するので，折り曲げたり汚したりしないこと。
4. マークシートに，氏名・受験番号を記入し，受験番号をマークする。マークがない場合や誤って記入した場合の答案は無効となる。また，問 Ⅲ の解答用紙にも受験番号・氏名を記入する。無記入の場合や受験番号を誤記入した場合はその答案は無効になる。

受験番号のマーク例(13015の場合)

受験番号				
1	3	0	1	5
万位	千位	百位	十位	一位
	⓪	●	⓪	⓪
●	①	①	●	①
②	②	②	②	②
③	●	③	③	③
④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	●
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

5. 問 Ⅰ, Ⅱ において，マークするときは，HBまたはBの黒鉛筆を用いること。誤ってマークした場合には，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえで，新たにマークし直すこと。
6. マークで解答する場合は，下記の例に従い，正しくマークすること。

正しいマーク例

① ② ● ④ ⑤ ⑥

誤ったマーク例

① ② ③ ④ ⑤ ⑥	○をする
① ② ③ ④ ⑤ ⑥	Vをする
① ② ● ④ ⑤ ⑥	完全にマークしない
① ② ● ④ ⑤ ⑥	枠からはみだす

7. マークで解答する場合，$\boxed{}$ の中の文字は，それぞれ符号(−)または，数字1文字が対応している。例えば，$\boxed{アイ}$ の形の場合，−9から−1の整数または10から99の整数が入り得る。

−2の場合

ア	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	●	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

32の場合

ア	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⓪	①	●	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

I $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同一問題で同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

(1) 数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1=\frac{16}{5},\ a_2=\frac{23}{5},\ a_{n+2}=\frac{1}{6}(a_{n+1}+a_n+8)\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

このとき，適当な正の実数αを用いて数列$\{b_n\}$を$b_n=a_n-\alpha$とすると$b_{n+2}=\dfrac{1}{6}(b_{n+1}+b_n)$とできる。さらに，適当な正の実数$\beta$，$\gamma$を用いて$c_n=b_{n+1}+\beta b_n$，$d_n=b_{n+1}-\gamma b_n$ $(n=1,2,\cdots)$とおくと，$c_{n+1}=\gamma c_n$，$d_{n+1}=-\beta d_n$とできる。

ここで，$\alpha=\boxed{ア}$，$\beta=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$，$\gamma=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$である。

したがって，$c_n=\gamma^{n-1}\boxed{カ}$，$d_n=(-\beta)^{n-1}\boxed{キ}$である。

これらを用いて数列$\{a_n\}$の一般項は，

$$a_n=\gamma^{n-1}\frac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}-(-\beta)^{n-1}\frac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}+\alpha$$

と表せる。

(2) 放物線 $C : y = \dfrac{x^2}{2} - x$ と直線 $l : y = x$ は原点Oと

点A$\left(\boxed{\text{ア}} , \boxed{\text{ア}} \right)$で交わり，線分OAと放物線 C で囲まれる

領域Rの面積は $\dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ となる。また，放物線 C 上の

点P$\left(a, \dfrac{a^2}{2} - a \right)$ $\left(0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ア}} \right)$から直線 l に引いた垂線との交点を

Qとすると，点Qの座標は$\left(\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} a^2, \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} a^2 \right)$で与えられ，

線分PQの長さは $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\, a \left(1 - \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} a \right)$ となる。

これらより領域Rを直線 l の周りに回転して得られる回転体の体積は

$\dfrac{\boxed{\text{コサ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{スセ}}} \pi$ となる。

(3) 複素数$z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$に対して，$|z_1|=1$かつ3点$z$，$zz_1$，$zz_1^2$が複素平面上で正三角形の3頂点となるのは，

$$z_1=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pm\frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}i$$ の場合である。

つぎに，3点z，zz_2，$z\bar{z}_2$が複素平面上で正三角形の3頂点となる場合を考える。z_2の実部が$-\sqrt{3}-1$の場合には

$$z_2=-\sqrt{3}-1\pm\frac{\boxed{\text{カ}}+\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}i$$ である。さらに，

$|z_3|=|z_2|$かつz，zz_3，$z\bar{z}_3$が正三角形の3頂点となるのは，z_2の他に

$$z_3=\frac{\boxed{\text{コ}}+\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}\pm\frac{\boxed{\text{セ}}+\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}i$$

がある。

ただし，複素数xに対して，$\bar{x}$はxの共役複素数とする。

(4) 関数 $y = \log_e x$ のグラフ上に点Aと関数 $y = e^x$ のグラフ上に点Bをとる。原点をOとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ をそれぞれ長さ1で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と同じ向きのベクトルとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ の内積の最大値を m とすると，

$$\log_e m = \boxed{\quad ア \quad} + \log_e \boxed{\quad イ \quad} - \log_e\left(e^{\boxed{\quad ウ \quad}} + \boxed{\quad エ \quad}\right)$$

である。

Ⅱ $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

点Rを中心とする半径5の円および長半径(長軸の長さの半分)が5，短半径(短軸の長さの半分)が3の楕円がある(図Ⅰ)。円上の点P′，Q′から楕円の長軸へ引いた垂線と楕円との交点をそれぞれ点P，Qとする。∠P′RQ′ ＝ α とすると，図Ⅰの斜線部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\alpha$ で与えられる。これをふまえて以下の問題を考えよう。

いま，一辺の長さ1の正方形ABCDに，なめらかで伸びない糸で作られた長さ5の輪がかけられている。糸を張りつめた状態で正方形の周りを一周させたときの頂点が動く軌跡は図Ⅱのようになる。この軌跡上に点E，F，Gを図Ⅱのようにとると，弧EFは点A，Dを焦点とし，長半径が $\boxed{\text{エ}}$ ，短半径が $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ の楕円の一部であり，弧FGは点B，Dを焦点とし，長半径が $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$，短半径が $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ の楕円の一部である。ここで辺ADの中点をMとすると，弧EFと線分ME，MFで囲まれる領域の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シス}}}\pi$ となる。

つぎに，線分AC，BDの交点をOとし，Oを中心とする半径 $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ の円 S を考える。さらに，円 S 上の点で線分BDに引いた垂線が点Fを通る点をF′とする(図Ⅲ)。このときAF ＝ $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ なので，∠F′OA ＝ β とすると，

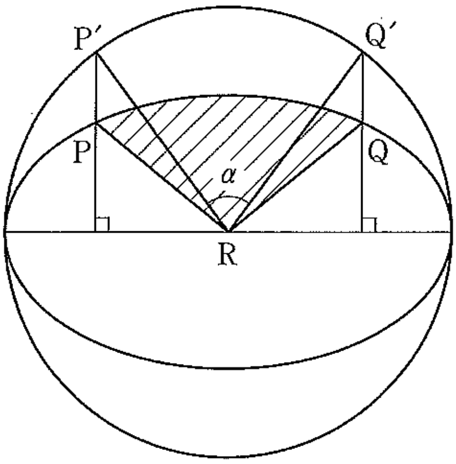
$\sin\beta = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ となる。

弧FGと線分OF，OGで囲まれる領域の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}\beta$ となる。

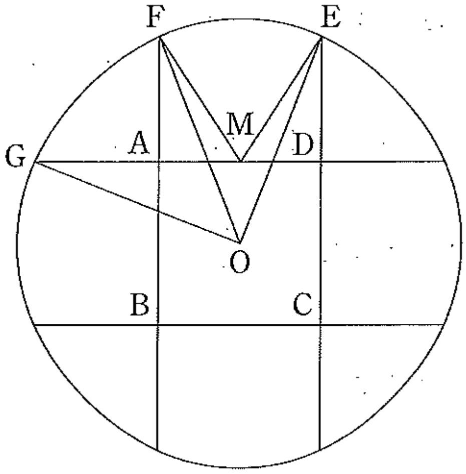
以上より，頂点の軌跡によって囲まれる部分の面積は

$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}\pi + \boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}\,\beta + \boxed{\text{ノ}}$

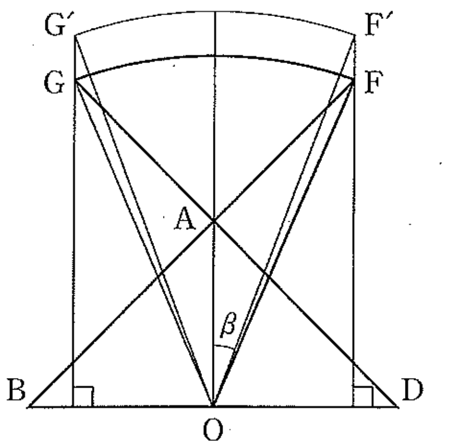
となることがわかる。



図Ⅰ



図Ⅱ



図Ⅲ

III 関数$f(x)$について，区間 I における次の性質(A)を考える。

性質(A)　区間 I に含まれる任意の 2 点 a，b に対して

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

が成り立つ。

(1)　関数$f(x)=-x^2$は区間$-\infty < x < \infty$において性質(A)を持つことを示せ。

(2)　関数$f(x)$が区間 I において性質(A)を持つとき，区間 I に含まれるn個の任意の数a_1，a_2，…，a_nに対して

(B)　$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) \geqq \frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n}$$

が成り立つことが知られている。
このことを$n=2^k$　(kは自然数)の場合について証明せよ。

(3)　連続関数$f(x)$が区間$[\,0\,,\,1\,]$において性質(A)を持つとき，

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

が成り立つことを示せ。