順天堂大学

27 M

# 数　　学

[注意事項]

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 問 Ⅰ，Ⅱ の解答はマークシートにマークし，問 Ⅲ の解答は専用の解答用紙に書くこと。
3. マークシート解答用紙は，コンピュータで処理するので，折り曲げたり汚したりしないこと。
4. マークシートに，氏名・受験番号を記入し，受験番号をマークする。マークがない場合や誤って記入した場合の答案は無効となる。また，問 Ⅲ の解答用紙にも受験番号・氏名を記入する。無記入の場合や受験番号を誤記入した場合はその答案は無効になる。

受験番号のマーク例(13015の場合)

| 受験番号 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 0 | 1 | 5 |
| 万位 | 千位 | 百位 | 十位 | 一位 |
| | ⓪ | ● | ⓪ | ⓪ |
| ● | ① | ① | ● | ① |
| ② | ② | ② | ② | ② |
| ③ | ● | ③ | ③ | ③ |
| ④ | ④ | ④ | ④ | ④ |
| ⑤ | ⑤ | ⑤ | ⑤ | ● |
| ⑥ | ⑥ | ⑥ | ⑥ | ⑥ |
| ⑦ | ⑦ | ⑦ | ⑦ | ⑦ |
| ⑧ | ⑧ | ⑧ | ⑧ | ⑧ |
| ⑨ | ⑨ | ⑨ | ⑨ | ⑨ |

5. 問 Ⅰ，Ⅱ において，マークするときは，HBまたはBの黒鉛筆を用いること。誤ってマークした場合には，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえで，新たにマークし直すこと。
6. マークで解答する場合は，下記の例に従い，正しくマークすること。

正しいマーク例

① ② ● ④ ⑤ ⑥

誤ったマーク例

| | |
|---|---|
| ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ | ○をする |
| ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ | Vをする |
| ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ | 完全にマークしない |
| ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ | 枠からはみだす |

7. マークで解答する場合，□ の中の文字は，それぞれ符号(－)または，数字1文字が対応している。ただし，符号は選択肢に含まれない場合がある。例えば，アイ の形の場合，－9から－1の整数または10から99の整数が入り得る。

－2の場合

| | | |
|---|---|---|
| ア | ● | ⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ |
| イ | | ⓪ ① ● ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ |

32の場合

| | | |
|---|---|---|
| ア | ⊖ | ⓪ ① ② ● ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ |
| イ | | ⓪ ① ● ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ |

**I** $\boxed{\phantom{ア}}$ に適する解答をマークせよ。

(1) 与えられた2点を通る放物線の一般式を求めてみよう。

たとえば点A(1，3)，点B(4，9)とする。

この2点を通る直線は $y = f(x) = \boxed{ア}\, x + \boxed{イ}$ である。またこの2点と $x$ 座標が共通の2点(1，0)，(4，0)で $x$ 軸と交わる2次の係数が1の放物線は $y = g(x) = \left(x - \boxed{ウ}\right)\left(x - \boxed{エ}\right)$

(ただし $\boxed{ウ} \leqq \boxed{エ}$ とする)である。

$y = f(x) + \alpha g(x)$ は $\alpha$ によらず2点A，Bを通る。よって

$y = \boxed{オ}\, x + \boxed{カ} + \alpha\left(x^2 - \boxed{キ}\, x + \boxed{ク}\right)$ $(\alpha \neq 0)$

が2点A，Bを通る放物線の一般式である。

この放物線が点C(−1，9)を通るとすると $\alpha = \boxed{ケ}$ である。

同様にしてA，B，Cの3点を通る3次曲線は一般に

$y = ax^2 + bx + c + \alpha(x^3 + dx^2 + ex + f)$ $(\alpha \neq 0)$ と表すことができる。ただし，$a = \boxed{コ}$，$b = \boxed{サシ}$，$c = \boxed{ス}$，$d = \boxed{セソ}$，$e = \boxed{タチ}$，$f = \boxed{ツ}$ である。

(2) 底面の半径 2，高さ 4 の円錐形の内面をもつ容器を考える。底面を上にして容器を垂直に立てて水を満たしたとき，水の体積は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ になる。底面の一つの直径を AB，円錐の頂点を O としたとき，OB が鉛直となるように静かに傾けた。このとき残る水の量を求めたい。

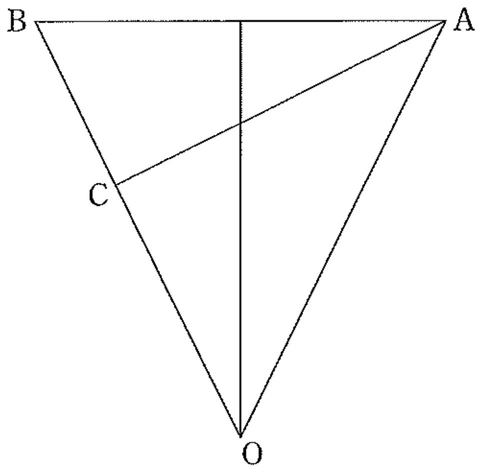
傾けたときに水面の縁となる楕円を $E$，OB と楕円 $E$ の交点を C とする。

初めの位置で，頂点 O を原点，頂点を含み底面に平行な平面を $xy$ 平面，O を通る鉛直線を上向きに $z$ 軸，BA に平行な直線を $x$ 軸とし，A の $x$ 座標が正となるように座標系を定める。以下，この座標系で考える。

容器内面の円錐の方程式は $x^2+y^2=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}z^2$ となる。また A の座標は $\left(\boxed{\text{カ}},\ 0,\ \boxed{\text{キ}}\right)$，C の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}},\ 0,\ \dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}\right)$，楕円 $E$ 上の点は $z=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}x+\boxed{\text{タ}}$ を満たす。楕円 $E$ の長軸の長さは $\dfrac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$，短軸の長さは $\dfrac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$，

OC は $\dfrac{\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ となる。したがって，残る水の量は

$\dfrac{\boxed{\text{ヒフ}}\sqrt{\boxed{\text{ヘホ}}}}{\boxed{\text{マミ}}}\pi$ である。



(3) $x$ 軸上の動点 P，$y$ 軸上の動点 Q があり，PQ $= 1$ をたもって動くとき，線分 PQ の動く範囲を求めよう。

この範囲は $x$ 軸および $y$ 軸に対し対称なので第 1 象限のみについて考える。P を $(t,\ 0)$ とするとき PQ は $\dfrac{x}{t} + \dfrac{y}{\sqrt{a + bt^c}} = 1$ となる。この方程式を満たす $(x,\ y)$ の範囲を求めればよい。

ひとつの $x$ の値に対して $y$ を $t$ の関数とみなしたとき，$x = dt^e$ を満たす $t$ で $y$ が最大となる。したがって，線分 PQ の動く範囲は不等式 $x^f + y^f \leqq 1$ で表される。ここで，$a = \boxed{\text{ア}}$，$b = \boxed{\text{イウ}}$，$c = \boxed{\text{エ}}$，

$d = \boxed{\text{オ}}$，$e = \boxed{\text{カ}}$，$f = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(4) $\mathrm{AB}=2\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=2\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6-2\sqrt{3}$ であるとき，点Dを次の2つの条件を満たす点とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=6$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=4$

このとき $\mathrm{AD}=\boxed{\text{ア}}$，$\sin\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}-\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

**II** $\boxed{\phantom{ア}}$ に適する解答をマークせよ。ただし，同じ記号の $\boxed{\phantom{ア}}$ がある場合は同一の値がはいる。

$y = g(x) = x^3 - 3x$ がある。この関数の変曲点は $\left(\boxed{ア}, \boxed{イ}\right)$ であり，$x = \boxed{ウエ}$ で極大になり，$x = \boxed{オ}$ で極小になる。この関数のグラフと直線 $y = g(\alpha)$ が３つの交点を持ち，２つの囲まれる部分が存在する。その２つの部分の面積比が２：１になるように $\alpha(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ を定義する。以下，面積比が２：１というときには直線の上の部分を２，下の部分を１とし，２番目の交点というときには，３つの交点を $x$ 座標の小さい順に並べたときの２番目の交点とする。

例えば，傾き９の直線で，この関数 $y = g(x)$ のグラフとその直線により囲まれる二つの部分の面積比が２：１になるものを求めたい。

$g(x) - 9x = x^3 - 12x$ の変曲点は $g(x)$ と同じ $\left(\boxed{ア}, \boxed{イ}\right)$ になり，このグラフは $y = g(x)$ のグラフを変曲点を中心に $x$ 軸方向に $\boxed{カ}$ 倍，$y$ 方向に $\boxed{キ}$ 倍したものになる。したがって，$g(x) - 9x$ のグラフと $x = \boxed{カ}\,\alpha$ において２番目の交点を持つ $x$ 軸に平行な直線によって囲まれる二つの部分の面積比は２：１となる。すなわち，$y = g(x)$ 上の $x = \boxed{カ}\,\alpha$ の点を通る傾き９の直線が求める直線である。

この例を利用して，次の３つの場合を考えてみよう。

場合１：

$y = g(x)$ と $y = x$ に平行な直線で囲まれる二つの部分の面積比が２：１となるとき，２番目の交点の $x$ 座標は $\dfrac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}\alpha$ である。

場合２：

$y = g(x)$ と $\left(\dfrac{1}{2}, g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ を通る直線で囲まれる二つの部分の面積比が２：１になるとき，この直線の傾きは $c\alpha^d + e$ である。ただし $c = \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$，$d = \boxed{スセ}$，$e = \boxed{ソタ}$ である。

場合３：

$y = x^3 - x^2 - x + 1$ のグラフと $x$ 軸に平行な直線で囲まれる二つの部分の面積比が２：１となるとき，２番目の交点の $x$ 座標は

$$x = \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\alpha + \frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$$

である。

**III** 次の問いに答えよ。

(1) 座標平面に三角形ABCと1点Oがある。ここで，Oを中心としてABC上の任意の点Pに対して，直線OP上の点QでOP：OQ＝1：$t$となるQの軌跡はどのような形になるか述べよ。

(2) Oを原点とし，放物線$y=x^2+1$上の任意の点Pに対して直線OP上の点QでOP：OQ＝1：$t$となるQの軌跡を求めよ。

(3) 放物線$y=(x-a)^2+b$と$y=\dfrac{1}{t}(x-ta)^2+tb$について，直線$y=sx$との交点を求めよ。ただし，$0<t<1$とする。

(4) 放物線$y=x^2+1$に対して共通接線を1本しか持たないような放物線$y=a(x-b)^2+c$について，$a$，$b$，$c$の条件を与えよ。