21 B

数　　学

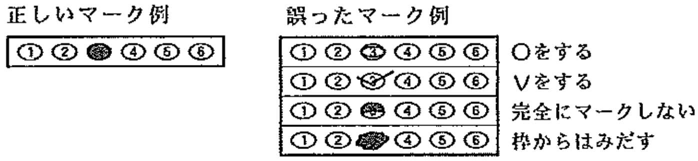
［注意事項］

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 問 [I]，[II] の解答はマークシートにマークし，問 [III] の解答は専用の解答用紙に書くこと。
3. マークシート解答用紙は，コンピュータで処理するので，折り曲げたり汚したりしないこと。
4. マークシートに，氏名・受験番号を記入し，受験番号をマークする。マークがない場合や誤って記入した場合の答案は無効となる。また，問 [III] の解答用紙にも受験番号・氏名を記入する。無記入の場合や受験番号を誤記入した場合はその答案は無効になる。

受験番号のマーク例(3015の場合)

受	験	番	号
3	0	1	5
千位	百位	十位	一位
⓪	●	⓪	⓪
①	①	●	①
②	②	②	②
●	③	③	③
④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	●
⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨

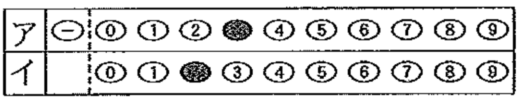
5. 問 [I]，[II] において，マークするときは，HBまたはBの黒鉛筆を用いること。誤ってマークした場合には，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえで，新たにマークし直すこと。
6. マークで解答する場合は，下記の例に従い，正しくマークすること。



7. マークで解答する場合，[　　] の中の文字は，それぞれ符号(－)または，数字1文字が対応している。ただし，符号は選択肢に含まれない場合がある。例えば，[ア イ] の形の場合，－9から－1の整数または10から99の整数が入り得る。

例　－2の場合

32の場合



I $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，それぞれの問題で同じ記号の $\boxed{}$ には同一の値がはいる。

(1) $f(x)=x^3-6x^2+7x+4$ とするとき $I=\int_0^4 f(x)dx=\boxed{\text{ア}}$ である。
$y=f(x)$ のグラフを x 軸の負の向きに 2 だけ平行移動したとき
$y=g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ，$a=\boxed{\text{イ}}$ ，$b=\boxed{\text{ウエ}}$ ，
$c=\boxed{\text{オ}}$ になる。これより $I=2\int_0^2\boxed{\text{オ}}\,dx$ となる。

(2) $y=x^3-9x+3\,|x^2-9\,|$ の極値は $\boxed{\text{ア}}$ 個あり，$x=\boxed{\text{イウ}}$ でとる極大値 $\boxed{\text{エオ}}$ が x 座標が最も小さい極値であり，$x=\boxed{\text{カ}}$ でとる極小値 $\boxed{\text{キ}}$ が x 座標が最も大きい極値である。

(3) $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。P の逆行列を Q とすると

$$Q=\begin{pmatrix} \boxed{ア} & \boxed{イ} \\ \boxed{ウ} & \boxed{エ} \end{pmatrix}$$ である。

$B=PAQ$ とおくと，$B=\begin{pmatrix} \boxed{オ} & \boxed{カ} \\ \boxed{キ} & \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}} \end{pmatrix}$，

$$B^2=\begin{pmatrix} \boxed{コ} & \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}} \\ \boxed{ス} & \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}} \end{pmatrix},\ B^3=\begin{pmatrix} \boxed{タ} & \dfrac{\boxed{チツ}}{\boxed{テ}} \\ \boxed{ト} & \dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニヌ}} \end{pmatrix}$$ となるので

$$\lim_{n\to\infty} A^n=\begin{pmatrix} \boxed{ネノ} & \boxed{ハ} \\ \boxed{ヒフ} & \boxed{ヘ} \end{pmatrix}$$ となる。

ただし一般に，$C_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ に対して，各成分が収束するとき

$$\lim_{n\to\infty} C_n=\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_n & \lim\limits_{n\to\infty} b_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n & \lim\limits_{n\to\infty} d_n \end{pmatrix}$$ とする。

(4) 原点O(0, 0, 0), 点A(1, 2, 1), 点B(2, 1, 1), 点C(1, 4, −2)があり, 3点O, A, Bを含む平面上に点Pを, 直線OPと直線PCが直交するようにとる。このとき点Pの軌跡をベクトルで考えてみよう。

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$とする。$\overrightarrow{OX}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$とするとき, O, A, Bの存在する平面上の点Xはすべてこの形で表わされることに注意する。また$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$, $\vec{q}=\overrightarrow{PC}$とすると, $\vec{q}=\vec{c}-\vec{p}$となり, 直交条件は$\vec{p}\cdot\vec{q}=0$となる。

まず, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\boxed{\text{ア}}$となる。

$\vec{a}+\vec{b}$を$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}$で割ったベクトルを$\vec{d}$,

$\vec{a}-\vec{b}$を$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$で割ったベクトルを$\vec{e}$とする。

これを用いて$\vec{p}=x\vec{d}+y\vec{e}$とすると

$$\left(x-\frac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)^2+\left(y-\frac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)^2=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

となり, $\vec{p}$はO, A, Bを含む平面上の

$$\left(\boxed{\text{ス}},\ \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}},\ \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\right)\text{を中心とし, 半径}\frac{\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{2}\text{の}$$

円上にある。

$\vec{p}=(\boxed{\text{ト}},\ \boxed{\text{ナ}},\ \boxed{\text{ニ}})$,

$\vec{q}=(\boxed{\text{ヌ}},\ \boxed{\text{ネ}},\ \boxed{\text{ノハ}})$の時

$|\vec{q}|$は最小値$\sqrt{\boxed{\text{ヒフ}}}$をとる。

II $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。

$y=x$ と $x=1$ および x 軸に囲まれた部分の x 軸の周りでの回転体を考える。この回転体は底面の半径 $\boxed{ア}$，高さ $\boxed{イ}$ の円錐になる。ここで回転体の体積をあたえる積分の被積分関数は各 x の値における x 軸に垂直な面によるこの円錐の切り口の面積になっている。点A(1, 0)を通る直線 $y=-x+1$ は，点B$\left(\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}, \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\right)$で $y=x$ と交わる。$AB=\dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ となり，$a=AB$ とおく。ここで，線分AB上の点Cに対して，$t=AC$ とおく。Cを通りABに垂直な直線の x 軸との交点をD，$x=1$ との交点をEとする。ここで，線分DEと $x=1$ および x 軸に囲まれた部分Tの x 軸の周りでの回転体を考える。この回転体の側面積は t の関数として $\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}\,\pi t^2$ と表される。この関数を0から a まで積分すると $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\pi$ となる。

次に，直線 $y=x$ および円 $x^2+y^2=2$ と x 軸によって囲まれた扇形の x 軸の周りでの回転体Vの体積は $\dfrac{\boxed{スセ}+\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}\pi$ である。球の体積の公式を半径 r の関数として微分すると表面積となる。このことに注意すると，このVの表面積は$\left(\boxed{ツ}-\sqrt{\boxed{テ}}\right)\pi$ となる。

$\boxed{\text{III}}$ 次の問いに答えよ。答えだけでなく式・説明など解答の途中の経過を示すこと。

(1) 関数 $y=f(x)$ の値域の定義を述べよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ があるとき，逆関数が存在する条件と逆関数の定義を述べよ。

(3) 対数関数を指数関数により定義せよ。

(4) 対数関数の底の変換公式を書きなさい。さらに，指数法則より底の変換公式を示しなさい。